SU DI UN'EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE PARZIALI E SUL TEOREMA DI BERNOULLI-LAPLACE.

Nota di **Ugo Broggi** (Buenos-Aires).

Adunanza del 9 novembre 1913.

1. Sia l'equazione alle differenze parziali

$$L(f(n,\ r)) = f(n+1,\ r+1) - pf(n,\ r) - qf(n,\ r+1) = 0$$

che, ove si ponga

$$\Delta_n f(n,\ r) = f(n+1,\ r) - f(n,\ r),$$
$$\Delta_r f(n,\ r) = f(n,\ r+1) - f(n,\ r),$$
$$\Delta^2_{nr} f(n,\ r) = \Delta_n f(n,\ r+1) - \Delta_n f(n,\ r),$$

può scriversi

$$L(f(n,\ r)) = \Delta^2_{nr} f(n,\ r) + \Delta_n f(n,\ r) + p\Delta_r f(n,\ r) = 0.$$

Si vede, che, se si ammette la costanza dei coefficienti p e q,

$$(1)\quad \begin{cases} f(n,\ r) = pf(n-1,\ r-1) + qf(n-1,\ r) = p[pf(n-2,\ r-2) + qf(n-2,\ r-1)] \\ \quad + q[pf(n-2,\ r-1) + qf(n-2,\ r)] = \cdots = \sum_{t=0}^{s+1} f(n-s,\ r-s+t)\binom{s}{t} p^{s-t} q^t \end{cases}$$

e per $n = s$

$$(2)\qquad f(n,\ r) = \sum_{t=0}^{n+1} f(0,\ r-n+t)\binom{n}{t} p^{n-t} q^t.$$

2. Si deduce dalla (2)

$$\binom{n}{r} = \binom{n-r}{0}\binom{r}{0} + \binom{n-r}{1}\binom{r}{1} + \cdots + \binom{n-r}{r}\binom{r}{r}$$

e pertanto anche, per $n = 2r$, la nota relazione

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Si ponga infatti

$$(a)\qquad \begin{cases} f(0,\ t) = 1 & \text{per } t = 0, \\ = 0 & \text{per } t \neq 0. \end{cases}$$

Se ne ricava

$$(3)\qquad f(n,\ r) = \binom{n}{n-r} p^r q^{n-r} = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

e ove si ponga in (1) $s = r$ e si sostituisca $f(n, r)$ col valore che la (3) ne fornisce

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \sum_{t=0}^{r+1} \binom{n-r}{t} p^t q^{n-r-t} \binom{r}{t} p^{r-t} q^t$$
$$= p^r q^{n-r} \sum_{t=0}^{r+1} \binom{n-r}{t} \binom{r}{t}$$

e quindi anche le relazioni annunziate.

3. Ove sia p la probabilità costante di un evento e, come postuleremo

$$p + q = 1$$

ed esprima $f(n, r)$ la probabilità che in n prove l'evento che si considera si verifichi r volte, la equazione

$$L(f(n, r)) = 0$$

è un'immediata e nota conseguenza dei teoremi delle probabilità totali e composte. Perchè l'evento si verifichi in r di n prove, è necessario infatti si presenti in $r - 1$ delle $n - 1$ prime prove, verificandosi nella ennesima, ovvero si verifichi in r delle $n - 1$ prime prove, e non si verifichi nella ennesima. E l'integrale particolare

$$f(n, r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

dianzi considerato, è l'espressione della probabilità definita da $f(n, r)$.

A un altro integrale particolare, non meno interessante dal punto di vista della teoria delle probabilità, giungiamo supponendo

$$(b) \qquad \begin{cases} f(0, t) = 1 & \text{per } t \leqq 0, \\ \phantom{f(0, t) = {}} 0 & \phantom{\text{per }} t > 0. \end{cases}$$

Si dimostra che, ove valgano le condizioni ora accennate, è anche

$$(c) \qquad f(n, 0) = 1, \quad f(n, n) = p^n$$

e reciprocamente, e che pertanto è indifferente si postulino le condizioni (b) o (c). La (1) può infatti porsi sotto la forma

$$f(n + s, r + s) = \sum_{t=0}^{s+1} f(n, r + t) \binom{s}{t} p^{s-t} q^t$$

e ove si postulino le condizioni (b) e si ponga $n = r = 0$ e si scriva n invece di s

$$f(n, n) = \sum_{t=0}^{n+1} \binom{n}{t} p^{n-t} q^t f(0, t) = p^n$$

così come la (2) fornisce, per $r = 0$

$$f(n, 0) = \sum_{t=0}^{n+1} f(0, -n + t) \binom{n}{t} p^{n-t} q^t$$
$$= \sum_{t=0}^{n+1} \binom{n}{t} p^{n-t} q^t = 1.$$

La dimostrazione delle proposizioni reciproche non è meno immediata.

Ma discende immediatamente dalla (2) che, ove valgano le condizioni b) è anche

$$f(n, r) = \sum_{t=0}^{t=n-r+1} \binom{n}{t} p^{n-t} q^t$$
$$= \binom{n}{0} p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \cdots + \binom{n}{r} p^r q^{n-r}.$$

Il nuovo integrale particolare è cioè l'espressione della probabilità che il numero m di volte in cui l'evento si presenta, su n prove, appartenga all'intervallo (r, n), i limiti inclusi $(r \leqq m \leqq n)$.

4. Affine di distinguere il nuovo integrale particolare dall'anteriore lo esprimiamo a mezzo della notazione $\psi(n, r)$ e poniamo

$$\psi(n, r) = \varphi(n, r) + \varepsilon(n, r)$$

intendendo per $\varphi(n, r)$ l'integrale

$$\varphi(n, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r-np}{\sqrt{2pqn}}}^{\sqrt{\frac{nq}{2p}}} e^{-t^2} dt.$$

Poichè

$$L[\varphi(n, r) + \varepsilon(n, r)] = L(\varphi(n, r)) + L(\varepsilon(n, r))$$

e

$$L(\psi(n, r)) = 0$$

è anche

$$L(\varepsilon(n, r)) = -L(\varphi(n, r))$$

essendo

$$L(\varphi(n, r)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\frac{r-np+q}{\sqrt{2npq+2pq}}}^{\sqrt{\frac{nq+q}{2p}}} e^{-t^2} dt - p \int_{\frac{r-np}{\sqrt{2npq}}}^{\sqrt{\frac{nq}{2p}}} e^{-t^2} dt - q \int_{\frac{r-np+1}{\sqrt{2npq}}}^{\sqrt{\frac{nq}{2p}}} e^{-t^2} dt \right].$$

Le condizioni al limite su cui è fondata la definizione di $\psi(n, r)$ ci dànno, per ogni valore positivo e intero di n

$$\varepsilon(n, n) = p^n$$

$$(d) \qquad \varepsilon(n, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\sqrt{\frac{qn}{2p}}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \int_{\sqrt{\frac{pn}{2q}}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right].$$

La funzione $\varepsilon(n, r)$ delle variabili intere n e r risulta così definita come l'integrale dell'equazione alle differenze parziali

$$L(\varepsilon(n, r)) + L(\varphi(n, r)) = 0$$

che sodisfa le condizioni (d).

5. È, per $\lim n = \infty$

$$\varepsilon(n, n) = 0$$
$$\varepsilon(n, 0) = 0$$

$$\lim_{n=\infty} \left[L(\varepsilon(n, r)) \right] = \lim_{n=\infty} p[\varepsilon(n, r+1) - \varepsilon(n, r)] = \lim_{n=\infty} L(\varphi(n, r)) = 0$$

$$\lim_{n=\infty} [\varepsilon(n, r+1) - \varepsilon(n, r)] = \lim_{n=\infty} \Delta_r \varepsilon(n, r) = 0$$

e pertanto, poichè

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon(n,\ 0) = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon(n,\ r) = 0$$

per ogni valore di r.

È dunque, per valori infinitamente grandi di n,

$$\psi(n,\ r) = \varphi(n,\ r);$$

$\varphi(n,\ r)$ esprime pertanto la probabilità che il numero m di volte in cui l'evento si presenta in un numero infinitamente grande n di prove sia tale, che

$$r \leqq m \leqq n.$$

Ma è anche, ove si ponga

$$r = np + t_1\sqrt{2npq},$$

$$n = np + t\sqrt{2npq},$$

$$\varphi(n,\ r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t} e^{-t^2}\,dt.$$

Esprimiamo con

$$\psi(n;\ r_1,\ r_2) = \psi(n,\ r_1) - \psi(n,\ r_2)$$

la probabilità che il numero m di volte in cui l'evento considerato si presenta appartenga all'intervallo

$$r_1 = np + t_1\sqrt{2npq} \leqq m \leqq r_2 = np + t_2\sqrt{2npq}.$$

È, per $\lim n = \infty$,

$$\lim_{n=\infty}\psi(n;\ r_1,\ r_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{r_1-np}{\sqrt{2npq}}}^{\sqrt{\frac{nq}{2p}}} e^{-t^2}\,dt - \int_{\frac{r_2-np}{\sqrt{2npq}}}^{\sqrt{\frac{nq}{2p}}} e^{-t^2}\,dt\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{r_1-np}{\sqrt{2npq}}}^{\frac{r_2-np}{\sqrt{2npq}}} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt,$$

in che appunto consiste il teorema di BERNOULLI-LAPLACE nella sua formulazione più nota.

6. Sia ora n finito e proponiamoci la determinazione della funzione $\varepsilon(n,\ r)$.

Poniamo per brevità

$$\varepsilon(n,\ r) = \varepsilon_{n,r}; \qquad - L\big(\varphi(n,\ r)\big) = h_{n,r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\sqrt{\frac{qn}{2p}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \int_{\sqrt{\frac{pn}{2q}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right] = a_n.$$

Dev'essere

$$L(\varepsilon_{n,r}) = h_{n,r}$$

e pertanto

$$\Delta^2_{n,r}\varepsilon_{n,r} = h_{n,r} - \Delta_n\varepsilon_{n,r} - p\Delta_r\varepsilon_{n,r}$$

e

$$\varepsilon_{n,n} = p^n, \qquad \varepsilon_{n,0} = a_n$$

essendo naturalmente

$$\varepsilon_{0,0} = p^0 = a_0 = 1 \quad ^{1)}.$$

Ci proponiamo d'integrare la equazione indicata valendoci del procedimento delle approssimazioni successive, applicato da É. PICARD alla risoluzione di problemi al contorno nella teoria delle equazioni differenziali ed alle derivate parziali [2]).

È

$$z(n, r) = f(n) + \varphi(r) - f(r)$$

l'integrale dell'equazione

$$\Delta^2_{n,r} z(n, r) = 0$$

tale che

$$z(n, 0) = f(n),$$

$$z(n, n) = \varphi(n)$$

ed è

$$z(n, r) = \sum_{\rho=0}^{r+1} \sum_{\nu=r}^{n+1} F(\nu, \rho)$$

l'integrale dell'equazione

$$\Delta^2_{nr} z(n, r) = F(n, r)$$

tale che

$$z(n, 0) = z(n, n) = 0.$$

Ciò premesso, poniamo

$$u_1 = a_n + p^r - a_r$$

esprimiamo cioè con u_1 l'integrale dell'equazione

$$\Delta^2_{nr} u_1 = 0$$

che sodisfa le condizioni

$$u_1(n, 0) = \varepsilon_{n,0} = a_n,$$

$$u_1(n, n) = \varepsilon_{n,n} = p^n$$

e parimenti poniamo

$$\Delta^2_{n,r} u_2 = h_{n,r} - p\Delta_r u_1 - \Delta_n u_1 = h^{(1)}_{n,r},$$

$$\Delta^2_{n,r} u_3 = -p\Delta_r u_2 - \Delta_n u_2 = h^{(2)}_{n,r}$$

. . . .

assumendo

$$u_2 = \sum_{\rho=0}^{r+1} \sum_{\nu=0}^{n+1} h^{(1)}_{\nu,\rho},$$

$$u_3 = \sum_{\rho=0}^{r+1} \sum_{\nu=r}^{n+1} h^{(2)}_{\nu,\rho}$$

. . . .

È

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{ad inf.}$$

---

[1]) La considerazione delle condizioni

$$\varepsilon_{0,0} = 1, \quad \varepsilon_{0,t} = \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad t \neq 0$$

equivalenti alle condizioni considerate nel testo, conduce ad una formula ricorrente analoga alla (1) e contenente la (1) come caso particolare.

[2]) Si cfr. per la integrazione di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico (analoghe per forma all'equazione del testo) la Nota I di É. PICARD al Vol. IV della *Théorie des surfaces* di G. DARBOUX (Paris, Gauthier-Villars), pag. 352.

l'integrale dell'equazione

$$L(\varepsilon(n,\ r)) = h(n,\ r)$$

che sodisfa le condizioni

$$\varepsilon(n,\ n) = p^n,\quad \varepsilon(n,\ 0) = a_n.$$

7. La dimostrazione non si differenzia dalla dimostrazione concernente la proposizione relativa alle equazioni alle differenze parziali di analoga forma [3]). È intanto, se scriviamo

$$U_m = u_1 + u_2 + \cdots + u_m,$$

$$U_m(n,\ 0) = a_n,\quad U_m(n,\ n) = p^n,$$

$$\Delta^2_{nr} U_m = \Delta^2_{nr} u_1 + \Delta^2_{nr} u_2 + \cdots + \Delta^2_{nr} u_m = h(n,\ r) - p\,\Delta_r U_{m-1} - \Delta_n U_{m-1}$$

e al limite, supposta la legittimità del passaggio al limite e

$$\lim_{m=\infty} U_m = U,$$

$$\Delta^2_{nr} U = h(n,\ r) - p\,\Delta_r U - \Delta_n U.$$

8. Perchè il passaggio al limite sia legittimo è necessaria e bastevole la convergenza delle serie

$$u_3,\quad u_4,\ \ldots$$

$$\Delta_n u_3,\quad \Delta_n u_4,\ \ldots$$

$$\Delta_r u_3,\quad \Delta_r u_4,\ \ldots$$

di cui la seconda e la terza convergono, ove converga la prima.

Supponiamo sia

$$|h^{(2)}_{n,r}| \leqq M$$

e poniamo

$$r = \xi,\qquad n - r = \eta.$$

È anche

$$|u_3| \leqq M \sum_{\xi=0}^{r+1} \sum_{\eta=r}^{n+1} 1 = M r(n-r) = M\xi\eta$$

e se N è un numero tale, che

$$\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \geqq \frac{1}{N},$$

$$\frac{\xi\eta}{\xi+\eta} \leqq N$$

$$|u_3| \leqq MN(\xi+\eta)$$

$$|\Delta_n u_3| \leqq 2MN(\xi+\eta);\quad |\Delta_r u_3| \leqq 2MN(\xi+\eta)$$

$$|u_4| \leqq 4MN \sum_{\xi=0}^{\xi+1} \sum_{\eta=0}^{\eta+1} (\xi+\eta) < 4MN \int_0^{\xi}\int_0^{\eta} (\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Dimostriamo che, se è

$$|u_{m-1}| \leqq \frac{(4N)^{m-2}.M.(\xi+\eta)^{m-2}}{4.(m-2)!},$$

---

3) Si cfr. per es., oltre PICARD [loc. cit. [2])]: J. HORN, *Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (Leipzig, G. J. Göschen, 1910), pag. 167.

è anche

$$|u_{m}| \leqq \frac{(4N)^{m-1}.M.(\xi+\eta)^{m-1}}{4(m-1)!} = \frac{(4N)^{m-1}.M.n^{m-1}}{4(m-1)!}.$$

È infatti

$$\sum_{\xi=0}^{\xi+1}\sum_{\eta=0}^{\eta+1}\frac{(\xi+\eta)^{m-2}}{(m-2)!} \leqq \frac{1}{(m-2)!}\int_0^{\xi}\int_0^{\eta}(\xi+\eta)^{m-2}d\xi d\eta,$$

$$\frac{1}{(m-2)!(m-1)}\frac{(\xi+\eta)^m-\xi^m-\eta^m}{m} = \frac{\xi\eta(\xi+\eta)^{m-2}}{(m-1)!}$$

e pertanto, per le precedenti disuguaglianze, la relazione annunziata. Ma la serie

$$\frac{M}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{(4nN)^m}{m!} = \frac{M}{4}e^{4nN}$$

è convergente: lo è pertanto pure assolutamente l'altra

$$u_3,\quad u_4,\quad u_5,\ \ldots\ .$$

9. Da

$$u_1 = a_n + p' - a_r = p^r - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\sqrt{\frac{qr}{2p}}}^{\sqrt{\frac{qn}{2p}}} e^{-t^2}dt + \int_{\sqrt{\frac{pr}{2q}}}^{\sqrt{\frac{pn}{2q}}} e^{-t^2}dt\right]$$

risulta

$$\Delta_n u_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\sqrt{\frac{qn}{2p}}}^{\sqrt{\frac{q(n+1)}{2p}}} e^{-t^2}dt + \int_{\sqrt{\frac{pn}{2q}}}^{\sqrt{\frac{p(n+1)}{2q}}} e^{-t^2}dt\right]$$

$$\Delta_r u_1 = -p^r q + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\sqrt{\frac{qr}{2p}}}^{\sqrt{\frac{q(r+1)}{2p}}} e^{-t^2}dt + \int_{\sqrt{\frac{pr}{2q}}}^{\sqrt{\frac{p(r+1)}{2q}}} e^{-t^2}dt\right].$$

Se in queste espressioni, e in quella di $h(n, r)$, sostituiamo alla funzione trascendente

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{l}^{k} e^{-t^2}dt$$

lo sviluppo convergente in serie di Taylor, che le corrisponde, ci vediamo ricondotti, per il calcolo effettivo di u_2 (e delle funzioni u di ordine superiore), alla integrazione finita di serie di potenze intere.

Si presenta così la possibilità di determinare il valore di $\varepsilon(n, r)$ con approssimazione arbitrariamente assegnata. In che il procedimento indicato si differenzia da quello classico del Laplace, che, coll'impiego della formula euleriana di sommazione e della serie di Stirling, che su di essa si fonda, conduce ad espressioni semi-convergenti. Vero è bensì che tali espressioni, per una loro caratteristica ben nota, possono venire utilmente applicate nei calcoli numerici, e consentono di ottenere approssimazioni praticamente bastevoli.

Buenos-Aires, Settembre 1913.

Ugo Broggi.