sammenhangs mit den geometrischen Fragen; sie bietet oft den Vorteil, dem Lernenden eine bequeme Eingangspforte zu öffnen, und kann auch vertiefend, problemerzeugend und erfolgfördernd wirken. Und so ist es im Gebiet der automorphen Funktionen vielfach gewesen. Ihre nahe Beziehung zur Geometrie *Lobatschefskys* hatte auch *Poincaré* in seinen ersten Arbeiten schon gestreift[1]). Das Erlanger Programm zeigt aber, daß *Klein* schon im Beginn seiner Forschertätigkeit die geometrische Deutung der linearen Substitutionen einer komplexen Variabeln auf der Kugel bewußt und vollwertig erfaßt hatte; er erkannte in ihnen sowohl die Kugeldrehungen, wie auch allgemeiner — was sich bei dem projektiven Charakter dieser Dinge direkt ergab — die Ausdrücke der nichteuklidischen Bewegungen, die die Kugel in sich überführen[2]). Jede Teilung der Kugel in Bereiche, die bei einer Gruppe von solchen Bewegungen in sich übergehen, liefert daher eine automorphe Funktion. Die von *Fricke* gegebene Aufzählung der möglichen Fundamentalbereiche im Falle einer endlichen Anzahl erzeugender Operationen ist als ein besonderer Erfolg der Kleinschen Ideen anzusehen. Als Ergebnis von besonderem Interesse sei noch erwähnt, wie die einzelnen Gattungen automorpher Funktionen den verschiedenen Maßbestimmungen entsprechen, die man zugrunde legt. Dazu muß daran erinnert werden, daß eine Maßbestimmung auf einer F_2 nur so möglich ist, daß man sie als Teil einer räumlichen Maßbestimmung einführt, und zwar in der Weise, daß eine Ebene des Raumes und ihr Pol P bezüglich der F_2 festbleibt; die im Bündel um P vorhandene Maßbestimmung überträgt sich dann perspektiv auf die Fläche. Je nachdem man nun den Punkt P außerhalb, auf oder innerhalb der Kugel wählt, wird die auf ihr entstehende Maßbestimmung hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch. Der elliptische Fall führt auf die Gruppen der regelmäßigen Körper. Der parabolische Fall führt zu den doppelt- und einfach-periodischen Funktionen, und der hyperbolische auf die eigentlich automorphen. Die einfachste Wahl der Ebene ist in diesem Fall die, daß man sie eine Durchmesserebene sein läßt; das aus ihrem Pol $P\infty$ strahlende orthogonale Parallelstrahlenbündel erzeugt dann auf der Kugel die Orthogonalkreise des Äquators, und deren Projektionen auf die Äquatorebene liefern die Teilungen der reell automorphen Funktionen. Um zu den allgemeinsten automorphen Funktionen zu gelangen, hat man zu der hyperbolischen Maßbestimmung des Gesamtraumes überzugehen, die durch die Teilungen der Kugeloberfläche bedingt ist.

5. Endlich sei erwähnt, daß *Klein* auch die Relativitätstheorie mit nichteuklidischen Auffassungen in Beziehung gesetzt hat[1]). Geht man von den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und t aus und schreibt in homogener Form

$$x = x_1/x_5,\quad y = x_2/x_5,\quad z = x_3/x_5,\quad t = x_4/x_5,$$

so daß $x_5 = 0$ das „Unendlichferne" der Raumwelt darstellt, so hängen neue und alte Mechanik mit den zwei ausgearteten quadratischen Formen $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ und $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2/c = 0$ zusammen, die in Punktkoordinaten durch die Gleichungen

$$\text{I.}\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,\quad x_4 = 0,\quad x_5 = 0,$$

$$\text{II.}\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0_5,\quad x_5 = 0$$

dargestellt sind. Ihre Invariantentheorie und die Bestimmung der Gruppe der linearen Transformationen, die die Gleichungen I und II und zugleich die Maßunterschiede unverändert lassen, ist dann kurzgesprochen die gruppentheoretische Grundlage der alten und der neuen Mechanik. Die Bestimmung dieser Gruppen liefert in der Tat das physikalisch geforderte Ergebnis und damit die Einordnung der klassischen und der modernen Mechanik in das Schema der projektiven Maßbestimmung für die vierdimensionale Raumwelt.

Bald 50 Jahre sind vergangen, seitdem die Welt die Einwirkung von *Kleins* nichteuklidischen Ideen an sich erfahren hat. Eine neue Generation in Wissenschaft und Schule ist seitdem herangewachsen. Die Wissenschaft hat sich allmählich ganz mit dem Gehalt dieser Ideen erfüllt; aber auch Lehrerschaft und Schule haben inzwischen seines Geistes einen Hauch verspürt. Angriffe, wie sie vor einigen Jahrzehnten von seiten einzelner Kreise gegen die mathematische „Afterweisheit" gerichtet wurden, sind heute verstummt. Daß sehen kann, wer sehen mag, bedarf keiner Bekräftigung; wichtiger ist und erfreulicher für die Wissenschaft, wie für *Klein* selbst, daß die große Mehrzahl derer, die dazu berufen sind, auch sehen wollen. Dem ruhigen Beschauer, der an den Sieg der Vernunft glaubt, die in den Dingen steckt, kann der fortschreitende Entwicklungsgang nicht zweifelhaft sein. Möge dieses Bewußtsein dem Lebensabend dessen, der sein ganzes Leben hindurch auch für Reform und Hebung des Unterrichts fördernd und klärend eingetreten ist, einer seiner freundlichen Begleiter sein.

---

1) Acta math. Bd. *1*, S. 8 (1882) und Bd. *3* (1883) S. 56.

2) Aus dem Gaußischen Nachlaß weiß man jetzt, daß die Formel für die Drehungen ihm wohlbekannt war; Werke, Bd. *8*, S. 355.

1) Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 19 (1910), S. 281. Vgl. auch noch eine neuere Bemerkung in Bd. 27, Abteilung 2, S. 43, die an den Gedanken anschließt, die Raumwelt als Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R} > 0$ zugrunde zu legen.

Die Bedeutung des Erlanger Programms.

Von Prof. Dr. C. Carathéodory, Berlin.

1. Das 19. Jahrhundert kann in gewisser Hinsicht als das Jahrhundert der Geometrie bezeichnet werden, weil sich damals die reine Geometrie,

die mehrere Generationen vernachlässigt worden war, plötzlich zur höchsten Blüte entfaltete. Die Bewegung geht von *Monge* aus und hängt mit der französischen Revolution zusammen, die nicht nur diesen Geometer von dem Zwange befreite, die darstellend-geometrischen Methoden, die er schon längst ersonnen hatte, als militärisches Geheimnis zu hüten, sondern auch die Ecole Polytechnique gründete, aus der — trotz ihres praktischen Zweckes — soviele Mathematiker ersten Ranges hervorgegangen sind.

Die Früchte des vielseitigen Unterrichts von *Monge* ließen nicht auf sich warten; wir verdanken einerseits seinem Einflusse die allmähliche Entwicklung des Dualitätsprinzips und die projektive Geometrie, die *Poncelet* in den Jahren der Kriegsgefangenschaft an der Wolga nach dem unglücklichen russischen Feldzuge Napoleons geschaffen hat, während andererseits das Buch von *Monge* selbst „Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie" (1795) die Grundlage zur späteren Flächentheorie bildete.

Die Pflege der Geometrie verbreitete sich mit großer Schnelligkeit über ganz Europa, vor allem in Deutschland, wo *Möbius* (1827), *Plücker* (ca. 1834), *Steiner* (ca. 1833), *v. Staudt* (1847), *Kummer*, um nur diese zu nennen, in kurzer Aufeinanderfolge die projektiven Koordinaten, die synthetische Geometrie, die Liniengeometrie, die Kreis- und Kugelgeometrie, die Theorie der algebraischen Flächen und noch anderes mehr entweder begründet oder in hohem Maße gefördert haben.

Eine zweite, von der ersten unabhängige Welle geht von *Gauß* aus, der in seiner Arbeit „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1827) die eigentliche Flächentheorie begründet hat. Diese Arbeit bildet außerdem die Grundlage zu den Untersuchungen von *Riemann* (1854, 1861) über die Krümmung der Räume, die heute in der Einsteinschen Gravitationstheorie eine so große Rolle spielen.

Im Jahre 1829 wurde ferner von *Lobatschewsky* und kurz darauf (1832) von *J. Bolyai* die nicht-Euklidische Geometrie entdeckt und, indem die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen geometrischen Axiomen allen Mathematikern klar wurde, ein Problem gelöst, das seit dem Altertum berühmt war[1]). *Gauß* und besonders *Riemann*, der in den schon erwähnten Arbeiten eine zweite Art nicht-Euklidischer Geometrie entdeckte, sind in diesem Zusammenhange auch zu nennen.

Als vierten Hauptpunkt muß man die Quaternionentheorie *Hamiltons* (1843) nennen, die eine Invariantentheorie der Bewegungen des Euklidischen Raumes enthält, und die Ausdehnungslehre *Graßmanns* (1844, 1865), in der zum ersten Male die Geometrie der mehrdimensionalen Räume begründet wird.

[1]) Ein lückenloser Beweis dieser Unabhängigkeit ist erst viel später erfolgt, wohl zuerst durch die Untersuchungen von *Beltrami* über Flächen konstanter Krümmung (1869) und vor allem durch die weiter unten erwähnten Arbeiten von *Klein*.

In den Jahren 1850—1870 entwickelten sich außerdem die algebraischen Methoden der Invariantentheorie, die man als den eigentlichen Schlüssel der modernen analytischen Geometrie ansehen muß, unter den Händen von *Cayley, Sylvester, Aronhold, Clebsch* und vielen anderen und bildeten allmählich eine umfangreiche Disziplin.

Endlich kann man die Analysis Situs nicht unerwähnt lassen, d. h. denjenigen Teil der Geometrie, der den Zusammenhang der geometrischen Figuren unabhängig von ihrer Gestalt erforscht, und der im Keime schon bei *Euler* zu finden ist, aber erst durch die Arbeiten von *Listing* (1847), *Möbius* (1863) und vor allem durch die funktionentheoretischen Gedanken *Riemanns* (1851, 1857) eine Wissenschaft für sich geworden ist.

2. Am Anfang der siebziger Jahre hatte sich also die Geometrie nach so vielen, scheinbar einander ganz fremden Richtungen entwickelt, daß es schien, sie könnte in mehrere getrennte Zweige zerfallen, um so mehr, als die Spezialisten sich vielfach bemühten, überall zwischen den verschiedenen Gebieten trennende Mauern zu errichten.

Um so berechtigteres Aufsehen erweckte der Aufsatz von *F. Klein* „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", der zuerst als Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät zu Erlangen im Jahre 1872 erschien[1]), und in dem auf dem einfachsten Wege, fast spielend, ein gemeinsames Band um sämtliche Arten von Geometrien geschlungen wurde und noch dazu zum ersten Male die Frage „Was ist eine Geometrie?" zugleich gestellt und beantwortet wird.

Diesen großen Erfolg verdankte *Klein* dem glücklichen Gedanken, die Idee der *Gruppe* an die Spitze seiner Überlegungen zu stellen. Der abstrakte Begriff einer Gruppe ist verhältnismäßig neueren Datums[2]). Er wurde durch

[1]) Wiedergedruckt in den Mathematischen Annalen Bd. *43* p. 63 (1893), außerdem in italienischer und französischer Übersetzung in den Annali di Matematica (2) t. 17 (1890), Annales de l'Ecole Normale (3) t. 8 (1891).

[2]) *Eine Gesamtheit von geometrischen Operationen bildet eine Gruppe, wenn sie alle Operationen enthält, die entstehen, wenn man zwei beliebige unter den gegebenen Operationen hintereinander ausführt, und wenn sie zugleich mit jeder Operation auch ihre Inverse enthält.*

Man macht sich mit dem Begriff der Gruppe am besten durch möglichst einfache Beispiele vertraut. Betrachten wir z. B. Drehungen um einen Punkt der Ebene; die zwei Drehungen um 90° und 180° bilden keine Gruppe, weil man, wenn man sie hintereinander ausführt, eine dritte, von den beiden ersten verschiedene, Drehung um 270° erhält. Dagegen bilden die vier Drehungen um 0°, 90°, 180° und 270° eine Gruppe. Die beiden Drehungen um 90° und 270° sind jede zu der anderen invers; wenn man sie nacheinander ausführt, kehrt nämlich jeder Punkt in seine ursprüngliche Lage zurück, sie ergeben bei Zusammensetzung

Lagrange (1770) und vor allem *Galois* (1832) bei ihren Untersuchungen über algebraische Gleichungen geprägt, und erst später, z. B. durch *C. Jordan* (1868), auch auf das geometrische Gebiet übertragen. Man kann andererseits aber wohl sagen, daß jeder Geometer, von *Euklid* ab, der die Bewegungsgruppe des Raumes am Anfang seines ersten Buches wiederholt benutzt, in seinem Unterbewußtsein mit der einen oder anderen Gruppe operiert hat. Dies ist z. B. bei *Möbius* in hohem Maße der Fall gewesen.

Für *Klein* aber ist die Gruppe nicht bloß ein Instrument, um neue Sätze zu finden, sondern sie bildet das wahre Wesen der Geometrie. Eine Geometrie entsteht erst, wenn man neben der räumlich ausgedehnten Mannigfaltigkeit noch eine Gruppe von Transformationen dieser Mannigfaltigkeit in sich vorgibt; und jeder Gruppe entspricht eine besondere Geometrie.

So wurde mit einem Schlage der Unterschied klar, der zwischen den verschiedenen Geometrien, die sich sozusagen zufällig entwickelt hatten, besteht, und zugleich ein Mittel gegeben, um alle möglichen Geometrien systematisch aufzustellen und zu untersuchen. Genau so, wie wenn die Sonne durch die Wolken bricht und alle Gegenstände einer weiten Landschaft plötzlich beleuchtet, wurden viele Beziehungen sichtbar, die zwischen den verschiedenen Theorien bestehen und bis dahin mit wenigen Ausnahmen unbemerkt geblieben waren. Es ist nicht möglich, den Gedanken von *Klein* knapper und besser darzustellen und ihn mit vielseitigeren Beispielen zu beleben, als er es selbst in seiner Abhandlung getan hat. Man muß die Schrift selbst lesen, die heute, nach fast fünfzig Jahren, ebenso fesselnd und frisch wirkt, wie am ersten Tage ihres Erscheinens.

Klein war nur dreiundzwanzig Jahre alt, als er die „Vergleichenden Betrachtungen“ veröffentlichte; aber er hatte schon Gelegenheit gehabt, mit den meisten unter den besten Geometern seiner Zeit in Berührung zu kommen. Er war in Bonn Assistent von *Plücker* gewesen, hatte in Göttingen intim mit *Clebsch* verkehrt und war in der Zwischenzeit im Winter 1870 mit seinem Jugendfreunde *S. Lie* in Paris gewesen, wo er *C. Jordan* kennen lernte und ganz besonders mit *G. Darboux* lebhafte Beziehungen anknüpfte, die der damalige Krieg nur für kurze Zeit unterbrach. So kam es, daß er trotz seiner Jugend in der Lage war, das Erlanger Programm zu verfassen, ein Programm im wahren Sinne des Wortes, das von seinem Autor einen vollständigen Überblick über die gesamte Geometrie seiner Zeit erforderte.

Im Erlanger Programm ist zum erstenmal eine Tendenz zutage getreten, die später für alle Arbeiten *Kleins* maßgebend geworden ist, und die darin bestand, den Zusammenhang entfernt liegender Gebiete aufzudecken und auf diese Weise neue fruchtbare Forschungsmöglichkeiten zu schaffen. Dadurch hat *Klein* mehr als irgend ein anderer im Gebiete der Mathematik dazu beigetragen, die Gefahren der durch eine zu große Spezialisierung hervorgerufenen Zersplitterung der Wissenschaft zu überwinden.

Auch war es kein reiner Zufall, daß *Klein* in seiner Schrift dem Begriff der Gruppe eine so maßgebende Rolle zuschrieb. Hatte er doch schon sehr früh im wechselseitigen Verkehr mit *Lie* die fundamentale Bedeutung der Gruppentheorie für die gesamte Mathematik eingesehen, eine Überzeugung, die während des Pariser Aufenthaltes der beiden Freunde nur bekräftigt werden konnte, da auch dort z. B. *C. Jordan* die letzte Hand an sein „Traité des Substitutions“ legte, das erste Lehrbuch über die Theorie endlicher Gruppen.

3. Das Erlanger Programm enthält aber noch mehr als diesen einen Hauptgedanken, durch den die Bedeutung der Gruppe für die Geometrie festgelegt worden ist. *Plücker* hatte nämlich gelehrt, wie man nicht nur die Punkte, sondern beliebige algebraische Gebilde durch endlich viele „Koordinaten“ charakterisieren und daher als Elemente des Raumes auffassen kann.

Eine Gruppe von Transformationen des Raumes kann aber auch, wie *Klein* bemerkte, als Gruppe von Transformationen solcher algebraischen Figuren unter sich angesehen werden und erzeugt daher nach *Kleins* Prinzip eine bestimmte Geometrie dieser Figuren. Nun kann es vorkommen, daß mehrere auf diese Weise gebildete Geometrien dieselbe Gruppe besitzen und daher selbst übereinstimmen.

Hierdurch wurde auf die bereits bekannten Übertragungsprinzipien, insbesondere auf den vor kurzem durch *Lie* entdeckten Zusammenhang zwischen Linien- und Kugelgeometrie ein neues Licht geworfen und zugleich für die Aufstellung neuer Übertragungsprinzipien eine einheitliche Grundlage geschaffen. Von diesem Gedanken, der sich auch später in vielen Arbeiten von jüngeren

---

die Drehung um 0°, die Identität. Ebenso sind die Drehungen um 0° und 180° sich selbst invers. Ähnlich sieht man, daß die Gesamtheit aller möglichen Drehungen um einen festen Punkt der Ebene eine Gruppe bilden. Die zuerst betrachtete Gruppe, die nur aus einem Teil der Operationen der zweiten Gruppe besteht, nennt man eine Untergruppe dieser.

Die Translationen der Ebene (oder des Raumes) bilden ebenfalls eine Gruppe, weil zwei Translationen hintereinander ausgeführt wiederum eine Translation ergeben. Die Inverse einer beliebigen Translation ist wieder eine Translation, welche dieselbe Richtung, denselben Betrag und den entgegengesetzten Sinn hat.

Ich erwähne noch einige geometrische Gruppen: die Gesamtheit der Bewegungen des Raumes, die eine Ebene, oder eine gerade Linie, oder eine Schraubenlinie, oder eine Kugel, oder einen der fünf regulären Körper mit sich zur Deckung bringen. Die Gesamtheit der Transformationen der Ebene, die gerade Linien in gerade Linien überführen, oder die — wie die Transformation durch reziproke Radien — jeden Kreis und jede Gerade entweder in einen Kreis oder in eine gerade Linie transformiert.

Geometern als fruchtbar erwiesen hat, hat *Klein* eine Reihe von wichtigen Anwendungen gemacht.

Die Art z. B., wie er die nicht-Euklidische Geometrie, zum Teil schon vor dem Erlanger Programm, behandelt hat, beruht auf diesem Abbildungsprinzip. *Klein* hat gefunden, daß man das Innere einer Kugel als Lobatschewskyschen nicht-Euklidischen Raum deuten kann, wenn man die Gruppe derjenigen projektiven Transformationen des Raumes, die die Kugel in sich transformieren, den Betrachtungen zugrunde legt. Ähnlich hat er den elliptischen nicht-Euklidischen Raum mit Hilfe einer imaginären Kugel realisiert.

Noch bekannter ist die Figur, in der die nicht-Euklidische Ebene durch eine Halbebene dargestellt wird, wobei das Bild der geraden Linien Halbkreise sind, die den Rand der Halbebene senkrecht schneiden und die Winkel in ihrer gewöhnlichen Bedeutung erhalten bleiben. Diese Figur spielt ja in der Theorie der automorphen Funktionen eine große Rolle, der *Klein* viele seiner wichtigsten und schönsten Arbeiten gewidmet hat und die — wenigstens durch die subjektive Weiterentwicklung der Gedanken *Kleins* — mit dem Erlanger Programm zusammenhängen und deshalb hier auch erwähnt sein mögen.

4. Später hat *Klein* wiederholt betont, daß die Ideen des Erlanger Programms auch als oberstes Einteilungsprinzip für die Mechanik genommen werden müssen. Zunächst hat er gezeigt, wie man die Mechanik des starren Körpers von diesem Standpunkte aus behandeln kann[1]). Dann aber hat die Relativitätstheorie und die neue Einsteinsche Gravitationstheorie ihm neuen Anlaß gegeben, die fundamentale Rolle, welche gerade hier die Gruppe, ganz im Sinne seines Erlanger Programms spielt, zu untersuchen[2]).

In der klassischen Mechanik muß man nämlich die zehngliedrige Gruppe zugrunde legen, die man erhält, wenn man die gleichförmigen Translationen des Raumes (3 Parameter), die orthogonalen Transformationen des Koordinatenkreuzes (6 Parameter) und die Ersetzung der Zeit t durch $(t+h)$ miteinander kombiniert. In der Elektrizitätstheorie dagegen (und überhaupt bei allen Erscheinungen, bei denen die Lichtgeschwindigkeit als endlich angesehen wird) muß man diese Gruppe, die man die Galileische genannt hat, durch die Gruppe der Lorentztransformationen ersetzen, die ebenfalls zehnparametrig ist und aus der man die erste durch einen Grenzprozeß gewinnen kann. In der Einsteinschen Gravitationstheorie wieder sind es die reellen eineindeutigen Transformationen der vierdimensionalen Welt, die man betrachten muß[1]).

Hieraus sieht man, wie sich der ursprüngliche Geltungsbereich der Kleinschen Ideen erweitert hat durch das Hinzukommen von Fragestellungen, die zur Zeit ihres Entstehens noch gar nicht existierten und für welche die Wissenschaft nicht einmal reif war, und das ist gerade ein Prüfstein für die Tragweite des Fortschritts, der durch das Erlanger Programm erzielt worden ist.

[1]) Zur Schraubentheorie von Sir *Robert Ball* (Ztschr. f. Mathem. u. Phys. Bd. *47* (1902); Wiederabdruck mit einem Zusatz i. d. Math. Ann. Bd. *62* (1906, S. 419).

[2]) Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe (Jahresber. d. deutsch. Mathematikervereinigung Bd. *19*, 1910).
Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie (Gött. Nachr. 1918).
Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt (Gött. Nachr. 1918).

[1]) Das letzte ist nicht ganz genau, weil im Unendlichen Nebenbedingungen hinzukommen, die noch nicht vollständig erforscht sind.

Klein, Riemann und die mathematische Physik.

Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Sommerfeld, München.

Als ich Oktober 1893 nach Göttingen kam, war die erste Vorlesung, die ich bei *Klein* hörte, eine solche über die Riemannsche P-Funktion. Wie alle Vorlesungen von *Klein*, war sie glänzend durchgearbeitet und von plastischem Vortrag. *Klein* konnte, was nur wenige Dozenten wagen dürfen, die Zusammenfassung des Vorgetragenen seinen Hörern mehrmals in jeder Stunde in die Feder diktieren, ohne den Anschein der Pedanterie hervorzurufen und ohne sich zu wiederholen. Er konnte dies, weil seine Zusammenfassung dem Gedanken stets eine neue zugespitzte Form gab. Dem Gedanken, nicht der Rechnung. Die Rechnung spielt in *Kleins* Vorlesungen eine ganz nebensächliche Rolle. Das war einer der Punkte, in denen er sich mit *Riemanns* Denkweise berührte. Die Definition der Funktionen aus ihren Eigenschaften, unabhängig von ihrer formalen Darstellung, die Formel nicht als Grundlage, sondern als Ausfluß der mathematischen Erkenntnis! Wir lernten in jener Vorlesung diesen Geist der Riemannschen und Kleinschen Funktionentheorie an dem Beispiel der hypergeometrischen Funktion kennen. Das hinreißende Temperament von *Klein*, das wohl in seiner rheinischen Heimat wurzelt, verstand es, diesen Geist der Mathematik uns vor Augen zu stellen und damit *Riemanns* Geist neu zu beleben.

Klein hat auf der Wiener Naturforscher-Gesellschaft 1894, als er nach dem Tode von *Helmholtz* an dessen Stelle als Vortragender der Allgemeinen Sitzung sprach, das Thema gewählt: Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik. Hier leitet er die besondere Kraft der Riemannschen Methode aus ihrer Durchtränkung mit der Denkweise der mathematischen Physik her. „Wie die einzelne Erscheinung im Gebiete der Physik von der Anordnung der Versuchsbedingungen abhängt, so indi-