Verallgemeinerung eines Satzes von *Gudermann* über sphärische, einander berührende Kreise.

Von Herrn *P. Kokott* in Neiße.

Denkt man sich auf einer Kugelfläche zwei Kreise, von denen der eine den andern umschließt, ohne ihn zu berühren, so kann man in den Ring unendlich viele Kreise beschreiben, welche die beiden gegebenen Kreise ungleichartig berühren, und von denen jeder den folgenden selbst wieder berührt. Hierbei ist es möglich, daß nach einem oder mehrmaligem Umlaufe die Kreisreihe sich schließt. Die Bedingung hierfür ist zuerst von *Steiner* gegeben worden zugleich mit der Angabe, daß es gleichgültig ist, an welcher Stelle der erste Kreis gezeichnet wird. Im 39. Bande dieses Journals hat *Gudermann* einen analytischen Beweis dieses Satzes gegeben. Der Zweck nachstehender Zeilen ist der Nachweis, daß der Satz in vollem Umfange auch dann noch Gültigkeit besitzt, wenn man den Gliedern der Kette die Bedingung auferlegt, daß sie sich unter konstantem Winkel ω schneiden; die Berührung ist dann nur der spezielle Fall $\omega = \pi$. Ich werde mich, was die Bezeichnungen anlangt, streng an die *Gudermann*sche Arbeit halten. Zwei auf einander folgende Kreise mögen sich in S schneiden, dann ist

$$\cos m'm = \cos m'M' \cos mM' + \sin m'M' \sin mM' \cos(v'-v),$$

andererseits

$$\cos m'm = \cos r \cos r' + \sin r \sin r' \cos \omega,$$

also

$$\cos(v'-v) + \cot(A-D+r)\cot(A-D+r')$$
$$= \frac{\cos r}{\sin(A-D+r)} \cdot \frac{\cos r'}{\sin(A-D+r')} + \frac{\sin r}{\sin(A-D+r)} \cdot \frac{\sin r'}{\sin(A-D+r')} \cos \omega.$$

Nun ist

$$\frac{\sin r}{\sin(A-D+r)}=\frac{\cos D}{\cos A}\cdot\frac{d-e\cos\varphi}{a-e\cos\varphi},$$

$$\frac{\cos r}{\sin(A-D+r)}=\frac{\cos D}{\cos A}\,\frac{1+ed\cos\varphi}{a-e\cos\varphi},$$

$$\cot(A-D+r)=\frac{1+ae\cos\varphi}{a-e\cos\varphi},$$

$$\cos(v'-v)=1-\frac{(a^2-e^2)(1-\cos(\varphi'-\varphi))}{(a-e\cos\varphi)(a-e\cos\varphi')}.$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man einen Ausdruck von der Form $\alpha P+\beta P'+\gamma S=\delta$, in welchem P das Produkt $\cos\varphi\cos\varphi'$, P' das Produkt $\sin\varphi\sin\varphi'$ und S die Summe $\cos\varphi+\cos\varphi'$ bedeutet. Und zwar ist $\alpha=(1+d^2)(a^2-e^2)+2e^2(1+a^2)\sin^2\frac{\omega}{2}$; $\beta=(1+d^2)(a^2-e^2)$; $\gamma=-2ed(1+a^2)\sin^2\frac{\omega}{2}$; $\delta=(1+d^2)(a^2-e^2)-2d^2(1+a^2)\sin^2\frac{\omega}{2}$.

Einen solchen Ausdruck kann man nun durch die Transformation

$$\cos\varphi=\frac{\cos\psi+\lambda}{1+\lambda\cos\psi}\quad\text{oder}\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$$

in eine Gleichung von derselben Form überführen; verfügt man dann über die willkürliche Größe λ in der Weise, daß der Koeffizient von S verschwindet, daß also $\gamma\lambda^2+(\alpha-\delta)\lambda+\gamma=0$ wird, so nimmt die Gleichung die einfachere Gestalt an

$$(\alpha+\gamma\lambda)\cos\psi'\cos\psi+\beta\sin\psi'\sin\psi=\delta-\gamma\lambda.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß eine Wurzel λ stets kleiner als Eins ist, so daß die Transformation reell bleibt. In unserem Falle ist $\lambda_1=\frac{e}{d}$; $\lambda_2=\frac{d}{e}$, und wir wollen annehmen, daß $e<d$ ist. Wir erhalten dann

$$\cos(\psi'-\psi)=1-\frac{2(1+a^2)(d^2-e^2)}{(1+d^2)(a^2-e^2)}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

oder

$$\sin\frac{\psi'-\psi}{2}=\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(1+a^2)(d^2-e^2)}{(1+d^2)(a^2-e^2)}}.$$

Nun ist der geometrische Charakter der Transformation gerade derselbe, den *Gudermann* auf anderem Wege gefunden hat. Projiziert man nämlich die Mittelpunkte der Berührungskreise auf eine Ellipse, deren einer Brennpunkt der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist, und deren große Achse mit der Hauptachse derjenigen sphärischen Ellipse, welche der Ort der Mittelpunkte m ist, zusammenfällt, so werden die Projektionspunkte vom Brennpunkte aus unter dem konstanten Winkel $\psi'-\psi$ gesehen. Soll sich also die n-gliedrige Kreiskette nach u Umläufen schließen, so muß

$$\sin\frac{u\pi}{n}=\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(1+a^2)(d^2-e^2)}{(1+d^2)(a^2-e^2)}}$$

oder

$$\sin\frac{u\pi}{n}=\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\cos 2E-\cos(R-R')}{\cos 2E-\cos(R+R')}}$$

sein; setzt man $\omega=\pi$, so entsteht in der Tat die *Steiner*sche Relation.

In der Ebene heißt die entsprechende Bedingung

$$\sin\frac{u\pi}{n}=\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(R-R')^2-\delta^2}{(R+R')^2-\delta^2}},$$

wenn δ die Mittelpunktsdistanz darstellt.

Durch ein dem vorigen ähnliches Rechnungsverfahren ist es möglich, den Satz inbezug auf dreidimensionale Gebilde in folgender Weise auszusprechen:

Man denke sich in dem Raume zwischen zwei Kugeln M und m, von denen die eine ganz innerhalb der anderen liegen soll, zwei andere Kugeln μ und μ', welche M und m berühren, sich selbst aber unter einem konstanten Winkel ω schneiden, dann bildet sich ihre Zentrallinie auf eine um den äußeren Ähnlichkeitspunkt gedachte Sphäre stets als konstanter Hauptkreisbogen ab. (Für einander berührende Kugeln hat *Clausen* den Satz in Band 7 dieses Journals bewiesen.) Schließt sich daher die Kugelreihe, deren Mittelpunkte in einem ebenen Schnitt durch die Punkte M und m liegen, so schließt sie sich auch in jeder Ebene, die durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln geht. Die analytische Bedingung hierfür ist $\sin\frac{\pi}{n}=\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(R-r)^2-\delta^2}{(R+r)^2-\delta^2}}$. *Steiner* hat sich mehrfach mit der Frage beschäftigt, unter welcher Voraussetzung sich die Kugeln rings um eine Kugel μ scharen können, indem sie einander der Reihe nach berühren, und die letzte nach einem oder mehreren Umläufen sich der ersten anschmiegt. Durch einen Satz, den Herr *Emch* für eben gelegene Kreise in The University of Colorado Studies Vol. 1. Nr. 2, 1902 bewiesen hat, und der auch für Kreise auf einer Sphäre gilt, ist man in den Stand gesetzt, die *Steiner*sche Gruppierung der Kugeln als einen besonderen Fall einer viel allgemeineren zu erkennen. Der Satz lautet:

Geht man von einer beliebigen Stelle eines Kreises auf einer Kugelfläche mit stets gleich langen, auf größten Kreisen abgemessenen Schritten nach einem anderen ihn umschließenden Kreise, von da zurück zum kleinen Kreise u. s. f., und gelangt man wieder zur Ausgangsstelle zurück, so schließt sich stets der Weg, von wo aus man ihn auch antreten möge.

Faßt man die gleich langen Schritte als Projektionen der Zentrallinien einander schneidender Kugeln auf, so ergibt sich folgender Satz:

Denkt man sich auf dem Rotationsellipsoide, das den Ort der Mittelpunkte der die Kugeln M und m berührenden Kugeln darstellt, zwei Ellipsen und legt den Mittelpunkt einer Kugel μ auf irgend einen Punkt der Peripherie der inneren Ellipse, den Mittelpunkt einer zweiten Kugel μ', welche μ unter dem Winkel ω schneidet, auf die äußere Ellipse, dann eine dritte Kugel μ_1, die wiederum μ' unter ω schneidet, auf die innere Ellipse und so fort ringsherum, so ist diese Kugelreihe entweder kommensurabel oder inkommensurabel; ist sie kommensurabel, so ist die Stelle, wo die erste Kugel hingelegt wird, völlig gleichgültig. Solcher Ellipsenpaare, bei denen die Kugelreihe sich schließt, gibt es unendlich viele. Läßt man beide Ellipsen zusammenfallen, so erhält man die *Steiner*sche Anordnung der Kugeln. Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß das Schneiden der Gebilde unter konstantem Winkel wieder nur einen speziellen Fall des Schneidens von zwei inbezug auf den inneren Ähnlichkeitspunkt reziproken Gebilden, Kreisen oder Kugeln, darstellt, ohne daß dadurch der Charakter der Schließungsgesetze geändert wird.