Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus.

Par M. *F. Gomes Teixeira* à Porto.

1. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par celle des ovales représentés par l'équation $|\sin z| = c$, où $z = x_1 + iy_1$ et $c \overline{\gtrless} 1$, qui a le centre à l'origine des coordonnées. Nous avons démontré dans un travail publié au tome CXVI, p. 14, de ce journal, que la fonction $f(x)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ au moyen de la formule

$$(1.)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_m \sin^m x,$$

où

$$A_0 = f(0),$$

$$A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{(2n)!},$$

$$A_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{(2n+1)!},$$

$S_{2n}^{(m)}$ représentant la somme des produits distincts des nombres

$$2^2, 4^2, 6^2, \ldots (2n-2)^2,$$

pris m à m, et $s_{2n+1}^{(m)}$ la somme des produits distincts des nombres

$$1^2, 3^2, 5^2, \ldots (2n-1)^2,$$

pris aussi m à m.

Nous allons dans ce travail faire application de cette formule à la détermination de quelques intégrales définies particulières et à la démonstration de quelques relations entre les nombres de *Bernoulli* et entre les nombres d'*Euler*, qui, suivant nous le croyons, n'ont pas encore été remarquées.

I.

Sur quelques intégrales définies.

2. On sait que, si la fonction $f(x)$ est développable en série de la forme (1.), on a

$$A_m = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)\cos z\, dz}{\sin^{m+1} z},$$

le contour de l'intégration étant une circonférence de rayon égal à β, ayant le centre à l'origine des coordonnées, telle que la fonction considérée soit holomorphe dans l'aire qu'elle limite.

En posant dans cette égalité

$$z = \beta e^{i\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\beta e^{i\theta})\cos(\beta e^{i\theta}) e^{i\theta}}{\sin^{m+1}(\beta e^{i\theta})}\, d\theta = \frac{2A_m\pi}{\beta},$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\beta e^{i\theta})\cos(\beta e^{i\theta})\sin^{m+1}(\beta e^{-i\theta}) e^{i\theta}\, d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{m+1}} = \frac{A_m\pi}{2^{2m+1}\beta}.$$

En supposant maintenant que $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$ sont des quantités réelles et en posant

$$F(i\theta) = f(\beta e^{i\theta})\cos(\beta e^{i\theta})\sin^{m+1}(\beta e^{-i\theta}) e^{i\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta) - F(-i\theta)]\, d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{m+1}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta) + F(-i\theta)]\, d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}$$

$$= \frac{[f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)]\,\pi}{(2n)!\, 2^{4n}\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)+F(-i\theta)]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+2}}$$
$$= \frac{[f^{(2n+1)}(0)+s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0)+\cdots+s_{2n+1}^{(n)} f'(0)]\,\pi}{(2n+1)!\,2^{4n+2}\beta}.$$

On peut écrire ces égalités *symboliquement* de la manière suivante:

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)+F(-i\theta)]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}$$
$$= \frac{f^2(0)[f^2(0)+2^2][f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{(2n)!\,2^{4n}}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)+F(-i\theta)]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+2}}$$
$$= \frac{f(0)[f^2(0)+1^2][f^2(0)+3]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{(2n+1)!\,2^{4n+2}}\cdot\frac{\pi}{\beta}$$

3. Nous allons considérer maintenant quelques cas particuliers. Soit premièrement

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}.$$

On a

$$\frac{1}{\cos x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\sin^{2n}x,$$

et, par conséquent,

$$\int_s \frac{dz}{\sin^{2n+1}z}=2i\pi\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n},$$

$$\int_s \frac{dz}{\sin^{2n}z}=0;$$

ou, en posant $z=\beta e^{i\theta}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n+1}(\beta e^{-i\theta})e^{i\theta}\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}=\frac{1.3\ldots(2n-1)\,\pi}{2^{4n+1}.2.4\ldots 2n\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n}(\beta e^{-i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n}}=0.$$

Si l'on remarque maintenant qu'on a

$$\sin(\beta e^{-i\theta}) = \sin(\beta\cos\theta)\frac{e^{-\beta\sin\theta}+e^{\beta\sin\theta}}{2} + i\cos(\beta\cos\theta)\frac{e^{-\beta\sin\theta}-e^{\beta\sin\theta}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}(\cos\omega + i\sin\omega),$$

où

$$\omega = \operatorname{arc\,tang}\frac{e^{-\beta\sin\theta}-e^{\beta\sin\theta}}{e^{-\beta\sin\theta}+e^{\beta\sin\theta}}\cot(\beta\cos\theta),$$

on peut encore écrire

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos[\theta+(2n+1)\omega]+i\sin[\theta+(2n+1)\omega]\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{3n}.n!}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos[\theta+(2n+1)\omega]\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{3n}.n!}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin[\theta+(2n+1)\omega]\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = 0.$$

On trouve de la même manière

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta+2n\omega)\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{n}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta+2n\omega)\,d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{n}} = 0.$$

4. Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = x^{2k}.$$

On a vu, dans le travail précédemment rapporté, que le développement de x^{2k} en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ est donné par la formule

$$x^{2k} = \sin^{2k}x\left[1+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{2n}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\ldots 2n}\sin^{2(n-k)}x\right].$$

Nous avons donc

$$\int_s \frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z} = 2i\pi\,\frac{S_{2n}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\ldots 2n},$$

$$\int_s \frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^{2n}z} = 0.$$

Mais

$$\int_s \frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^m z} = \frac{2k}{m-1}\int_s \frac{z^{2k-1}dz}{\sin^{m-1}z}.$$

Donc

$$\int_s \frac{z^{2k-1}dz}{\sin^{2n}z} = \frac{2i\pi\, S_{2n}^{(n-k)}}{2k(2k+1)(2k+2)\dots(2n-1)},$$

$$\int_s \frac{z^{2k-1}dz}{\sin^{2n-1}z} = 0.$$

En posant maintenant $z=\beta e^{i\theta}$ et en employant ensuite une analyse semblable à celle qu'on a appliquée au cas considéré dans le n° précédent, on trouve les résultats suivants:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2(k\theta+n\omega)d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = \frac{S_{2n}^{(n-k)}}{2^{2n-1}.2k(2k+1)\dots(2n-1)}\cdot\frac{\pi}{\beta^{2k}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2(k\theta+n\omega)d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[2k\theta+(2n-1)\omega]d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n-1}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[2k\theta+(2n-1)\omega]d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n-1}{2}}} = 0.$$

Il convient de remarquer le cas particulier où $k=1$. On a alors

$$S_{2n}^{(n-1)} = 2^2.4^2.6^2\dots(2n-2)^2,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2(\theta+n\omega)d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = \frac{[(n-1)!]^2}{2(2n-1)!}\cdot\frac{\pi}{\beta^2}.$$

5. On considère de la même manière la fonction x^{2k+1}, dont le développement ordonné suivant les puissances de $\sin x$, donné dans le travail précédemment indiqué, est le suivant:

$$x^{2k+1} = \sin^{2k+1}x\left[1+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{s_{2n+1}^{(n-k)}}{(2k+2)(2k+3)\dots(2n+1)}\sin^{2(n-k)}x\right].$$

On a d'abord

$$\int_s \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+2} z} = 2i\pi \frac{s_{2n+1}^{(n-k)}}{(2k+2)(2k+3)\dots(2n+1)},$$

$$\int_s \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+1} z} = 0.$$

La première égalité donne ensuite

$$\int_s \frac{z^{2k}\,dz}{\sin^{2n+1} z} = \frac{2n+1}{2k+1}\int_s \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+2} z} = 2i\pi \frac{(2n+1)s_{2n+1}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\dots(2n+1)},$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{(2k+1)i\theta}\sin^{2n+1}(\beta e^{-i\theta})\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}$$
$$= \frac{(2n+1)s_{2n+1}^{(n-k)}}{2^{4n+1}(2k+1)(2k+2)\dots(2n+1)} \cdot \frac{\pi}{\beta^{2k+1}}.$$

On trouve, au moyen de cette égalité, les résultats suivants:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n+1}{2}}}$$
$$= \frac{s_{2n+1}^{(n-k)}}{2^{2n}(2k+1)(2k+2)\dots 2n} \cdot \frac{\pi}{\beta^{2k+1}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[(2k+1)\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n+1}{2}}} = 0.$$

On trouve aussi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta + 2n\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[(2k+1)\theta + 2n\omega]\,d\theta}{(e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = 0.$$

Les formules obtenues au n°. 3 sont comprises entre celles qu'on vient de trouver, comme on peut le voir en posant $k=0$ et en ayant égard à l'égalité

$$s_{2n+1}^{(n)} = 3^2 . 5^2 . 7^2 \dots (2n-1)^2.$$

II.

Sur quelques relations entre les nombres de Bernoulli et entre les nombres d'Euler.

6. Appliquons la formule (1.) à la fonction $\frac{x}{\sin x}$.
Comme on a

$$f(0)=1,\; f''(0)=2(2-1)B_1,\; f^4(0)=2(2^3-1)B_3, \dots$$
$$f^{(2n)}(0)=2(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}$$

et

$$f'(0)=f'''(0)=\dots=f^{(2n-1)}(0)=0,$$

$B_1, B_3, B_5, \dots$ représentant les *nombres de Bernoulli,* on trouve

$$x=\sin x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}+S_{2n}^{(1)}(2^{2n-3}-1)B_{2n-3}+\dots+S_{2n}^{(n-1)}(2-1)B_1}{(2n)!}\sin^{2n+1}x.$$

Mais, on a

$$x=\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n(2n+1)}\sin^{2n+1}x.$$

En comparant ces deux résultats, on obtient la relation de récurrence entre les *nombres de Bernoulli:*

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}&(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}+S_{2n}^{(1)}(2^{2n-3}-1)B_{2n-3}+\dots+S_{2n}^{(n-1)}(2-1)B_1\\ &\qquad=\frac{[1.3.5\dots(2n-1)]^2}{2(2n+1)}.\end{aligned}\right.$$

Il résulte immédiatement de cette identité la représentation suivante des nombres considérés au moyen d'un déterminant:

$$B_{2n-1}=\frac{1}{2(2^{2n-1}-1)}\begin{vmatrix} u_{2n-1} & S_{2n}^{(1)} & S_{2n}^{(2)} & \vdots & S_{2n}^{(n-1)} \\ u_{2n-3} & 1 & S_{2(n-1)}^{(1)} & \vdots & S_{2(n-1)}^{(n-2)} \\ u_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & S_{2(n-2)}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$u_{2n-1}=\frac{[1.3\dots(2n-1)]^2}{2n+1},\quad u_{2n-3}=\frac{[1.3\dots(2n-3)]^2}{2n-1},\dots,\quad u_1=\frac{1}{3}.$$

En posant

$$B'_{2n-1} = (2^{2n-1} - 1) B_{2n-1}, \quad B'_{2n-3} = (2^{2n-3} - 1) B_{2n-3}, \ldots$$

on peut écrire *symboliquement* la formule (2.) de la manière suivante:

$$B'[B'^2 + 2^2][B'^2 + 4^2] \ldots [B'^2 + (2n-2)^2] = \frac{1}{2} u_{2n-1},$$

où on doit remplacer, après les multiplications, les exposants des puissances de B' par des indices.

7. En partant de la fonction $\operatorname{tang} x$ et en employant une analyse semblable, on trouve une autre relation de récurrence entre les nombres de *Bernoulli* et une autre expression au moyen d'un déterminant des mêmes nombres, où figurent les quantités représentées par $s_{2n+1}^{(m)}$.

On a, en effet,

$$f'(0) = \frac{2(2^2-1)}{1} B_1, \quad f'''(0) = \frac{2^3(2^4-1)}{2} B_3, \ldots f^{(2n+1)}(0) = \frac{2^{2n+1}(2^{2n+2}-1)}{n+1} B_{2n+1},$$

$$f(0) = f''(0) = \cdots = f^{(2n)}(0) = 0,$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} \frac{2^{2n+2}-1}{n+1} B_{2n+1} + 2^{2n-1} \frac{2^{2n}-1}{n} s_{2n+1}^{(1)} B_{2n-1} + \cdots + 2 \frac{2^2-1}{1} s_{2n+1}^{(n)} B_1}{(2n+1)!} \sin^{2n+1} x.$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\operatorname{tang} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \sin^{2n+1} x.$$

En comparant les deux développements on trouve la relation de récurrence

$$(3.) \left\{ \begin{aligned} & 2^{2n+1} \cdot \frac{2^{2(n+1)}-1}{n+1} B_{2n+1} + 2^{2n-1} s_{2n+1}^{(1)} \frac{2^{2n}-1}{n} B_{2n-1} + \cdots + 2 s_{2n+1}^{(n)} \frac{2^2-1}{1} B_1 \\ & \qquad = [1.3.5\ldots(2n-1)]^2 (2n+1), \end{aligned} \right.$$

dont on tire

$$B_{2n+1} = \frac{n+1}{2^{2n+1}(2^{2(n+1)}-1)} \begin{vmatrix} v_{2n-1} & s_{2n+1}^{(1)} & s_{2n+1}^{(2)} & \vdots & s_{2n+1}^{(n)} \\ v_{2n-3} & 1 & s_{2n-1}^{(1)} & \vdots & s_{2n-1}^{(n-1)} \\ v_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & s_{2n-3}^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$v_{2n-1} = [1.3.5\ldots(2n-1)]^2(2n+1), \quad v_{2n-3} = [1.3.5\ldots(2n-3)]^2(2n-1), \ldots.$$

En posant

$$B''_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(2^{2(n+1)}-1)}{n+1} B_{2n+1}, \qquad B''_{2n-1} = \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n} B_{2n-1}, \ldots$$

on peut écrire, *symboliquement*, la relation (3.) de la manière suivante:

$$B''[B''^2+1^2][B''^2+3^2]\ldots[B''^2+(2n-1)^2] = v_{2n-1},$$

où on doit, comme précédemment, remplacer, après les multiplications, les exposants de B'' par des indices.

8. On peut trouver encore une autre relation intéressante entre les nombres de *Bernoulli* en partant du développement suivant de $x \cot x$, qu'on obtient au moyen de la formule (1.):

$$x \cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n-1} + S_{2n}^{(1)} 2^{2n-2} B_{2n-3} + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} 2^2 B_1}{(2n)!} \sin^{2n} x$$

et en le comparant au développement suivant:

$$x \cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n+1)} \sin^{2n} x,$$

que nous allons démontrer.

Posons

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \sin^{2n} x$$

et, par conséquent,

$$\frac{z \cot z \cos z}{\sin^{2n+1} z} = \frac{\cos z}{\sin^{2n+1} z} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \sin^{2n} z,$$

et intégrons les deux membres de cette égalité le long d'une circonférence s ayant le centre à l'origine des coordonnées et dont le rayon soit assez petit pour que cette série soit convergente dans l'aire que la circonférence limite. Puisqu'on a

$$\int_s \frac{\cos z\, dz}{\sin^m z} = 0, \quad (m \gtrless 1)$$

et

$$\int_s \frac{\cos z\, dz}{\sin z} = 2 i\pi,$$

on trouve ainsi

$$A_{2n} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_s \frac{z\cot z \cos z\,dz}{\sin^{2n+1} z}.$$

Mais, nous avons

$$\int\limits_s \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z} = \int \frac{z\,dz}{\sin^{2n+2}z} - \int \frac{z\,dz}{\sin^{2n}z};$$

et, puisque

$$z^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)} \cdot \frac{1}{n} \sin^{2n} z,$$

et, par conséquent

$$z = \cos z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)} \sin^{2n-1} z,$$

nous avons aussi

$$\int\limits_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n}z} = 2i\pi \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)},$$

$$\int\limits_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n+2}z} = 2i\pi \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)}.$$

Donc

$$A_{2n} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_s \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z} = -\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n+1)}.$$

Le deuxième développement de $x\cot x$ précédemment indiqué résulte immédiatement de cette égalité, et, en le comparant au premier, on trouve la relation

$$(4.)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2^{2n} B_{2n-1} + S_{2n}^{(1)} 2^{2(n-1)} B_{2n-3} + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} 2^2 B_1 \\ & \qquad = \frac{(2.4.6\ldots(2n-2))^2 2n}{2n+1}, \end{aligned} \right.$$

qui donne

$$B_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n}} \begin{vmatrix} u_{2n-2} & S_{2n}^{(1)} & S_{2n}^{(2)} & \vdots & S_{2n}^{(n-1)} \\ u_{2n-4} & 1 & S_{2(n-1)}^{(1)} & \vdots & S_{2(n-1)}^{(n-2)} \\ u_{2n-6} & 0 & 1 & \vdots & S_{2(n-2)}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$u_{2n-2} = \frac{(2.4\ldots(2n-2))^2 2n}{2n+1}, \quad u_{2n-4} = \frac{(2.4\ldots(2n-4))^2 2(n-1)}{2n-1}, \ldots\ u_0 = \frac{2}{3}.$$

9. On peut trouver pour les *nombres d'Euler* des relations analogues à celles qu'on vient d'obtenir pour les nombres de *Bernoulli*.

En effet, en représentant ces nombres par $E_2, E_4, E_6, \ldots$, on a

$$(5.)\qquad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \frac{E_6}{6!}x^6 + \cdots;$$

et, par conséquent, en appliquant la formule (1.) à la fonction $\frac{1}{\cos x}$, on trouve

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{2n} + S_{2n}^{(1)}E_{2(n-1)} + \cdots + S_{2n}^{(n-1)}E_2}{(2n)!}\sin^{2n} x.$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\sin^{2n} x + \cdots.$$

Donc nous avons la relation de récurrence suivante entre les nombres d'*Euler*:

$$(6.)\qquad E_{2n} + S_{2n}^{(1)}E_{2(n-1)} + \cdots + S_{2n}^{(n-1)}E_2 = [1.3.5\ldots(2n-1)]^2,$$

dont il résulte l'expression, au moyen d'un déterminant, des mêmes nombres:

$$E_{2n} = \begin{vmatrix} a_{2n-1} & S_{2n}^{(1)} & S_{2n}^{(2)} & \vdots & S_{2n}^{(n-1)} \\ a_{2n-3} & 1 & S_{2(n-1)}^{(1)} & \vdots & S_{2(n-1)}^{(n-2)} \\ a_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & S_{2(n-2)}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$a_{2n-1} = [1.3.5\ldots(2n-1)]^2, \qquad a_{2n-3} = [1.3.5\ldots(2n-3)]^2, \ldots$$

10. Considérons encore la fonction $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, pour trouver une autre relation entre les nombres d'*Euler*, où figurent les nombres représentés par $s_{2n+1}^{(m)}$.

Puisque

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = E_2 x + \frac{E_4}{3!}x^3 + \frac{E_6}{5!}x^5 + \cdots$$

on a

$$f(0)=0,\ f'(0)=E_2,\ f''(0)=0, \ldots f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=E_{2n+2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n+2} + s_{2n+1}^{(1)} E_{2n} + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} E_2}{(2n+1)!} \sin^{2n+1} x.$$

Mais on a aussi

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x + \sin^3 x + \sin^5 x + \cdots.$$

Donc

$$(7.)\qquad E_{2n+2} + s_{2n+1}^{(1)} E_{2n} + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} E_2 = (2n+1)!$$

et

$$E_{2n+2} = \begin{vmatrix} (2n+1)! & s_{2n+1}^{(1)} & s_{2n+1}^{(2)} & \vdots & s_{2n+1}^{(n)} \\ (2n-1)! & 1 & s_{2n-1}^{(1)} & \vdots & s_{2n-1}^{(n-1)} \\ (2n-3)! & 0 & 1 & \vdots & s_{2n-3}^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

Les formules (6.) et (7.) peuvent être écrites symboliquement de la manière suivante:

$$E^2[E^2+2^2][E^2+4^2]\dots[E^2+(2n-2)^2] = [1.3\dots(2n-1)]^2,$$
$$E^2[E^2+1^2][E^2+3^2]\dots[E^2+(2n-1)^2] = (2n+1)!$$

11. La méthode qu'on vient d'employer pour trouver quelques relations entre les nombres de *Bernoulli* et d'*Euler* donne aussi des relations entre les nombres représentés précédemment par $S_{2n}^{(m)}$ et $s_{2n+1}^{(m)}$. Nous indiquerons ici la suivante

$$s_{2n+1}^{(n)} - s_{2n+1}^{(n-1)} + s_{2n+1}^{(n-2)} - \cdots \pm 1 = 0,$$

qui résulte d'appliquer les formules (1.), (2.) et (3.) à la fonction $\sin x$, et la suivante:

$$S_{2(n+1)}^{(n)} - S_{2(n+1)}^{(n-1)} + S_{2(n+1)}^{(n-2)} - \cdots \pm 1 = [1.3\dots(2n-1)]^2(2n+1),$$

qui résulte d'appliquer les mêmes formules à la fonction $\cos x$ et de comparer le résultat au développement

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{1.2.2^2}\sin^4 x - \frac{1.3}{1.2.3.2^3}\sin^6 x \cdots.$$
