3.

Reduction des *p*fachen Integral-Ausdrucks

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\left(a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} + \ldots + a_p x_p^{n_p}\right) x_1^{r_1 - 1} x_2^{r_2 - 1} \ldots x_p^{r_p - 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_p,$$

in welchem $a_1, a_2, \ldots a_p, n_1, n_2, \ldots n_p, r_1, r_2, \ldots r_p$ constante Gröfsen, $x_1, x_2, \ldots x_p$ die Integrationsvariabeln sind und φ eine beliebige Function ist, auf ein einfaches, dieselbe Function φ enthaltendes bestimmtes Integral.

(Von Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

Im zweiten Bande meiner Differenzial- und Integralrechnung, in Nr. 322., habe ich das Doppel-Integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

durch Umsetzung der Integrationsvariabeln x und y in u und v mittels der zwei Gleichungen

$$x = v \cos u, \qquad y = v \sin u,$$

von der Ausmittelung eines einfachen bestimmten Integrals abhängig dargestellt und durch die vermittelnden Gleichungen folgende Reductionsgleichung gefunden:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^\infty \varphi(x)\, dx.$$

Nachdem ich diesen, als den synthetischen Theil der Lösung erreicht, habe ich dann auf analytischem Wege, durch Umsetzung der Variabeln x und y im Doppel-Integrale linkerhand in $x\sqrt{a}$ und $y\sqrt{b}$, folgende allgemeine Reductionsgleichung erhalten:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(a x^2 + b y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{4\sqrt{(ab)}} \int_0^\infty \varphi(x)\, dx.$$

Ganz in ähnlicher Weise werde ich mich in der vorliegenden Abhandlung zuerst mit dem synthetischen Theile befassen, der, wie der Erfolg zeigen wird, blofs die Reduction des Doppel-Integrals

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^m + y^n)\, dx\, dy$$

auf ein einfaches bestimmtes Integral betrifft, und dann auf analytischem Wege nach und nach zu der in der Überschrift ausgesprochenen Reduction fortgehen.

1.

Das Doppel-Integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^m + y^n)\, dx\, dy,$$

in welchem φ eine beliebige Function bedeutet und m sowohl als n angebbare positive, reelle Werthe sind, ist durch Einführung zweier neuen Integrationsvariabeln statt der x und y zuletzt auf ein einfaches, die Function φ noch enthaltendes bestimmtes Integral zurückzubringen möglich; wie sofort gezeigt werden soll. Wir stellen zu diesem Zwecke folgende zwei Gleichungen auf:

$$1. \qquad x^m = v^2 \cos u^2, \qquad y^n = v^2 \sin u^2,$$

wo also u und v die neuen Integrationsvariabeln sind, und bestimmen dann die Integrationsgrenzen dieser einzuführenden Integrationsvariabeln, so wie die nach diesen zu integrirende Differenzialfunction, nach der im zweiten Bande meiner Differenzial- und Integralrechnung in Nr. 321. gegebenen Anleitung.

Wird nämlich die neueingeführte Variable v aus den eben aufgestellten zwei Gleichungen eliminirt, so ergiebt sich

$$x^m \sin u^2 - y^n \cos u^2 = 0.$$

Da diese Gleichung bei der oben festgestellten Verfügung über die Exponenten m und n sowohl für jede der beiden Annahmen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \infty$$

constante Werthe für u giebt, nämlich:

$$u = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad u = 0,$$

als auch für jede der folgenden:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = \infty,$$

dergleichen Werthe für u, nämlich

$$u = 0 \quad \text{und} \quad u = \infty,$$

so folgt, dafs gegenwärtig ohne Unterschied die eine oder die andere der in der oben citirten Nr. aufgestellten Umformungsgleichungen eines Doppel-Integrals, die in (18.) oder die in (21.), zu Grunde gelegt werden darf. Stellt man nun aus den Gleichungen (1.) den Ausdruck für

$$\Delta = \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dy}{du}$$

her, so ergiebt sich

$$\varDelta = -\frac{4}{mn} v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1} \sin u^{\frac{2}{n}-1} \cos u^{\frac{2}{m}-1};$$

wodurch man folgende Umformungsgleichung erhält:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n)\,dx\,dy = \frac{4}{mn}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^\infty \varphi(v^2) v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1} \sin u^{\frac{2}{n}-1} \cos u^{\frac{2}{m}-1}\,dv\,du,$$

die auch mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n)\,dx\,dy = \frac{4}{mn}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin u^{\frac{2}{n}-1} \cos u^{\frac{2}{m}-1}\,du . \int_0^\infty \varphi(v^2) v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,dv;$$

und da aus dieser die Bestimmung unseres vorgelegten Doppel-Integrals von der eines Products zweier, in keinerlei gegenseitigen Abhängigkeit stehenden einfachen Integrale abhängig erkannt wird, so ist der eigentliche synthetische Theil der Aufgabe jetzt herbeigeführt; von der aus wir nunmehr auf analytischem Wege das im Eingange gesteckte Endziel zu erreichen trachten werden.

Berücksichtiget man zuerst die in Nr. 222. des ersten Bandes unserer Differenzial- und Integralrechnung aufgestellte Gleichung (48.), vermöge welcher

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin u^{\frac{2}{n}-1} \cos u^{\frac{2}{m}-1}\,du = \tfrac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

ist, wo die Function $\Gamma(z)$ durch die Gleichung

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\,dx$$

definirt wird; so geht die obige Umformungs- oder Reductionsgleichung in

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n)\,dx\,dy = \frac{2}{mn}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2) v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,dv,$$

oder auch, mit Beachtung der durch die Gleichheit

$$2.\qquad \Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$$

ausgedrückten Eigenthümlichkeit der Function $\Gamma(z)$, in

$$(\alpha.)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y)\,dx\,dy = 2\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2) v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,dv$$

über; die für alle positiven angebbaren reellen Werthe von m und n Bestand hat.

2.

Mit Hülfe der in der vorigen Nr. gewonnenen Reductionsgleichung (α.) sind wir auch den dreifachen Integral-Ausdruck

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n+z^p)\,dx\,dy\,dz,$$

in welchem m, n, p reelle und positive angebbare Werthe haben und der nur noch von der Ausmittelung eines einzigen einfachen bestimmten Integrals abhängig ist, welches dieselbe, durchaus willkürliche Function φ enthält, darzustellen im Stande.

Es besteht nämlich, besagter Reductionsgleichung (α.) gemäfs, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n+z^p)\,dx\,dy = 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2+z^p)\,v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,dv;$$

also bietet sich zunächst folgende Umformungsgleichung dar:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n+z^p)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(v^2+z^p)\,v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,dv\,dz.$$

Wird nun im Doppel-Integrale rechterhand

$$v^2 \text{ durch } v^{\frac{mn}{m+n}}, \text{ also } v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,dv \text{ durch } \frac{mn}{2(m+n)}$$

ersetzt, so erhält man, beachtend die Gleichheit (2.) vorhergehender Nr., folgende:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m y^n+z^p)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{(m+n)\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(v^{\frac{mn}{m+n}}+z^p)\,dv\,dz.$$

Nun hat man, gleichfalls mit Hülfe der Reductionsgleichung (α.) vorhergehender Nr.,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(v^{\frac{mn}{m+n}}+z^p)\,dv\,dz = 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2)\,v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\,dv,$$

oder auch, beachtend die Gleichheit (2.) vorhergehender Nr., folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(v^{\frac{mn}{m+n}}+z^p)\,dv\,dz$$

$$= 2\,\frac{(m+n)\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{mnp\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2)\,v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\,dv;$$

also ist

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n+z^p)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{mnp\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2)\,v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\,dv,$$

oder endlich auch

$$(\beta.)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x^m+y^n+z^p)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2)\,v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\,dv,$$

welche für alle angebbaren positiven und reellen Werthe von m, n, p Bestand hat und unsere im Eingange aufgestellte Behauptung bestätigt.

3.

Stellt man, um die allgemeinste Reductionsgleichung der mehrfachen Integrale, die den bis jetzt besprochenen analog sind, zu finden, das Integral der Differentialfunction

$$\varphi(x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+x_3^{m_3}+\ldots.+x_p^{m_p})\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots.dx_p,$$

wo die Integrationen sämmtliche zwischen 0 und ∞ enthaltenen reellen Werthe der Integrationsvariabeln umfassen, durch

$$\int_0^{\infty,(p)} \varphi(x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots.+x_p^{m_p})\,dx_1\,dx_1\ldots.dx_p$$

vor, so sind wir nach den gefundenen und begründeten Ergebnissen der beiden vorhergehenden Nrn. folgende allgemeine Reductionsgleichung:

$$(A.)\quad \int_0^{\infty,(p)} \varphi\{x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots.+x_p^{m_p}\}\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_p$$

$$= 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m_1}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots.\Gamma\left(1+\frac{1}{m_p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\ldots.+\frac{1}{m_p}\right)}\int_0^\infty \varphi(v^2)\,v^{\frac{2}{m_1}+\frac{2}{m_2}+\ldots.+\frac{2}{m_p}-1}\,dv,$$

aufzustellen und zu begründen im Stande.

Diese durch Induction erlangte Reductionsgleichung beweisen wir auf die bekannte Art, indem wir von der Annahme, sie bestehe für einen bestimmten ganzen Zahlenwerth von p (welches für die Werthe $p=2$ und $p=3$ in den beiden vorhergehen Nrn. bereits erhärtet ist), ausgehen, und dann das Bestandhaben derselben auch für $p+1$ darthun; woraus dann, wie bekannt, die allgemeine Gültigkeit für jeden positiven ganzen Werth von p unmittelbar folgt.

Wir gehen zur Erreichung dieses Ziels von der folgenden Gleichung aus:

$$\int_0^{\infty,(p+1)} \varphi\{x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots.+x_p^{m_p}+x_{p+1}^{m_{p+1}}\}\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_p\,dx_{p+1}$$
$$=\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty,(p)} \varphi\{x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots.+x_p^{m_p}+x_{p+1}^{m_{p+1}}\}\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_p\right\}dx_{p+1},$$

welche, mit Beachtung des im Eingange dieser Nr. getroffenen Übereinkommens sofort als richtig erkannt wird. Wird diese durchaus identische Gleichung mittels des durch die als bestehend angenommene Gleichung (A.) ausgedrückten Ergebnisses weiter umgeformt, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$M = 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m_1}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots.\left(1+\frac{1}{m_p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\ldots.+\frac{1}{m_p}\right)}$$

gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\int_0^{\infty,(p+1)} \varphi\{x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots.+x_p^{m_p}+x_{p+1}^{m_{p+1}}\}\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_p\,dx_{p+1}$$
$$= M\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(v^2+x_{p+1}^{m_{p+1}})\,v^{\frac{2}{m_1}+\frac{2}{m_2}+\ldots.+\frac{2}{m_p}-1}\,dv\,dx_{p+1};$$

so dafs es nur noch auf die weitere Reduction des Doppel-Integrals rechterhand vom Gleichheitszeichen ankommt. Wird dasselbe einstweilen durch u vorgestellt, nämlich

$$u=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(v^2+x_{p+1}^{m_{p+1}})\,v^{\frac{2}{m_1}+\frac{2}{m_2}+\ldots.+\frac{2}{m_p}-1}\,dv\,dx_{p+1}$$

gesetzt, so läfst sich die Bestimmung von u auf die eines einfachen bestimmten Integrals in folgender Weise zurückführen.

Wir ersetzen nämlich im Doppel-Integrale rechterhand

$$v^{\frac{2}{m_1}+\frac{2}{m_2}+\ldots.+\frac{2}{m_p}} \quad \text{durch} \quad v.$$

Dies giebt unmittelbar

$$u = \tfrac{1}{2} M_1 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(v^{M_1} + x_{p+1}^{m_{p+1}})\, dv\, dx_{p+1},$$

wo zur Vereinfachung der Darstellung

$$M_1 = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_p}}$$

gesetzt ist; und wenn nunmehr die in Nr. 1. aufgestellte Reductionsgleichung (α.) zugezogen wird, so ist

$$u = M_1 \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{M_1}\right) . \Gamma\left(1+\frac{1}{m_{p+1}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{m_{p+1}}\right)} \int_0^{\infty} \varphi(v^2)\, v^{\frac{2}{M_1}+\frac{2}{m_{p+1}}-1}\, dv,$$

oder auch, mit Beachtung der Gleichheit (2.) in Nr. 1.,

$$u = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{M_1}\right) . \Gamma\left(1+\frac{1}{m_{p+1}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{m_{p+1}}\right)} \int_0^{\infty} \varphi(v^2)\, v^{\frac{2}{M_1}+\frac{2}{m_{p+1}}-1}\, dv.$$

Die für u gefundene Bestimmung in die oben aufgestellte Gleichung gesetzt, giebt

$$\int_0^{\infty, (p+1)} \varphi\{x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \dots + x_p^{m_p} + x_{p+1}^{m_{p+1}}\}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_p\, dx_{p+1}$$

$$= M \frac{\Gamma\left(\frac{1}{M_1}\right) . \Gamma\left(1+\frac{1}{m_{p+1}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{m_{p+1}}\right)} \int_0^{\infty} \varphi(v^2)\, v^{\frac{2}{M_1}+\frac{2}{m_{p+1}}-1}\, dv,$$

und wenn hier die Werthe für M und M_1 restituirt werden, so ergiebt sich endlich die Gleichung

$$\int_0^{\infty, (p+1)} \varphi\{x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \dots + x_p^{m_p} + x_{p+1}^{m_{p+1}}\}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_p\, dx_{p+1}$$

$$= 2 \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m_1}\right) . \Gamma\left(1+\frac{1}{m_2}\right) \dots \Gamma\left(1+\frac{1}{m_{p+1}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\dots+\frac{1}{m_{p+1}}\right)} \int_0^{\infty} \varphi(v^2)\, v^{\frac{2}{m_1}+\frac{2}{m_2}+\dots+\frac{2}{m_{p+1}}-1}\, dv,$$

welche, mit der durch Induction erlangten Reductionsgleichung (A.) verglichen, die Richtigkeit unserer Behauptung unzweideutigerweise darthut. ***Es gilt also die allgemeine Reductionsgleichung (A.) für alle ganzen und positiven Werthe von p, wenn die Exponenten der Integrationsvariabeln, d. h. die constanten Gröſsen***

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \dots \quad m_p,$$

positive reelle Werthe haben.

4.

Aus der in vorhergehender Nr. aufgestellten und begründeten Reductionsgleichung (*A.*) leiten wir noch auf folgendem Wege eine bei weitem allgemeinere ab.

Werden in derselben zuerst die Integrationsvariabeln des $p$fachen Integrals, nämlich die Gröfsen

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots . \; x_p$$

nach der Ordnung ihrer Folge durch

$$x^{\frac{1}{m_1}}, \; x_2^{\frac{1}{m_2}}, \; x_3^{\frac{1}{m_3}}, \; \ldots . \; x_p^{\frac{1}{m_p}}$$

ersetzt, so geht die Reductionsgleichung, mit Zuziehung der Gleichheit (2.) in Nr. 1., in folgende über:

$$\int_0^{\infty,(p)} \{x_1 + x_2 + \ldots . + x_p\} x_1^{\frac{1}{m_1}-1} . x_2^{\frac{1}{m_2}-1} \ldots . _p^{\frac{1}{m_p}-1} dx_1 \, dx_2 \ldots . dx_p$$
$$= 2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}\right) . \Gamma\left(\frac{1}{m_2}\right) \ldots . \Gamma\left(\frac{1}{m_p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots . + \frac{1}{m_p}\right)} \int_0^\infty \varphi(v^2) v^{2\left(\frac{2}{m_1} + \frac{2}{m_2} + \ldots . + \frac{2}{m_p}\right)-1} dv.$$

Ersetzt man hier die reellen und positiven angebbaren Constanten $m_1, m_2, \ldots . m_p$ durch die reciproken Werthe derselben, so erhält man die Reductionsgleichung

$$\int_0^{\infty,(p)} \varphi\{x_1 + x_1 + \ldots . + x_p\} x_1^{m_1-1} . x_2^{m_2-1} \ldots . x_p^{m_p-1} dx_1 \, dx_2 \ldots . dx_p$$
$$= 2 \frac{\Gamma(m_1) . \Gamma(m_2) \ldots . \Gamma(m_p)}{\Gamma(m_1 + m_2 + \ldots . + m_p)} \int_0^\infty \varphi(v^2) v^{2(m_1 + m_2 + \ldots . + m_p)-1} dv,$$

in welcher die Exponenten $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_p$, wie bisher, reelle und positive angebbare Gröfsen sind. Wenn nun endlich in dieser Reductionsgleichung die Integrationsvariabeln

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots . \; x_p$$

der Reihe nach in

$$a_1 x_1^{n_1}, \; a_2 x_2^{n_2}, \; a_3 x_3^{n_3}, \; \ldots . \; a_p x_p^{n_p}$$

übergehen, wo die Coëfficienten sowohl als die Exponenten, nämlich

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots . \; a_p, \quad n_1, \; n_2, \; n_3, \; \ldots . \; n_p,$$

reelle und positive angebbare Constanten sind, und wenn hierauf die vorhin erwähnten Exponenten

$$m_1, \; m_2, \; m_3, \; \ldots . \; m_p$$

nach der Ordnung ihrer Folge durch

$$\frac{r_1}{n_1},\ \frac{r_2}{n_2},\ \frac{r_3}{n_3},\ \ldots\ \frac{r_p}{n_p}$$

ersetzt werden, wo also $r_1, r_2, r_3, \ldots r_p$ ebenfalls reelle und positive angebbare Constanten sind; so stellt sich die am Eingange dieser Abhandlung angekündigte Reductionsgleichung wie folgt dar:

$$\text{(I.)}\ \int_0^{\infty,\,(p)} \varphi\{a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} + \ldots + a_p x_p^{n_p}\}\, x_1^{r_1-1} . x_2^{r_2-1} \ldots x_p^{r_p-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$

$$= N\int^{\infty} \varphi(v^2)\, v^{2\left(\frac{r_1}{n_1}+\frac{r_2}{n_2}+\ldots+\frac{r_p}{n_p}\right)-1} dv,$$

wo zur Vereinfachung

$$\text{(II.)}\quad N = \frac{2}{n_1 n_2 \ldots n_p\, a_1^{\frac{r_1}{n_1}} a_2^{\frac{r_2}{n_2}} \ldots a_p^{\frac{r_p}{n_p}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{r_1}{n_1}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{n_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{r_p}{n_p}\right)}{\Gamma\left(\frac{r_1}{n_1}+\frac{r_2}{n_2}+\ldots+\frac{r_p}{n_p}\right)}$$

gesetzt worden ist. Diese Reductionsgleichung besteht für jeden ganzen und positiven Werth von p und die Constanten

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_p,\ r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_p,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_p$$

sind alle reeller, jedoch nur positiv angebbarer Werthe fähig; die Function φ endlich bleibt ganz willkürlich.

Zürich, im April 1843.