15.

Über die Gaufsischen Formeln zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals.

(Vom Herrn Professor Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

§. 1.

Zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_{a-b}^{a+b} Fx.\partial x$$

mögen n Werthe der Function Fx beliebig gewählt werden können, z. B.

$$F(a+\alpha b),\quad F(a+\beta b),\quad F(a+\gamma b),\quad \ldots.\quad F(a+\nu b)$$

Diese Werthe multipliciren wir entsprechend mit A, B, C, ... N, und bilden die Summe

$$AF(a+\alpha b)+BF(a+\beta b)+CF(a+\gamma b)+\ldots.+NF(a+\nu b),$$

in welcher die $2n$ Gröfsen α, β, γ, ... ν und A, B, C, ... N so bestimmt werden sollen, dafs die Differenz

$$\Delta=\int_{a-b}^{a+b} Fx.\partial x-2b[AF(a+\alpha b)+BF(a+\beta b)+CF(a+\gamma b)+\ldots.+NF(a+\nu b)]$$

so klein als möglich wird. Diese Differenz läfst sich immer in eine convergente Reihe nach steigenden Potenzen von b entwickeln, da die Grenzen der Integration beliebig klein angenommen werden können; denn weitere Grenzen lassen sich durch stückweises Integriren auf engere zurückbringen.

Nach dem Maclaurinschen Satze ist

$$\int_{a-b}^{a+b} Fx.\partial x = 2b\left(Fa+\frac{b^2}{1.2.3}.\frac{\partial^2 Fa}{\partial a^2}+\frac{b^4}{1.2.3.4.5}.\frac{\partial^4 Fa}{\partial a^4}+\ldots\right),$$

folglich, wenn man auch die vorgelegte Summe nach diesem Satze entwickelt, sie von der Entwicklung des Integrals abzieht und den Rest durch 2 dividirt,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta = \quad & b\,(1-\ A-\ B-\ C-\ldots.-\ N)\,Fa, \\
- \quad & b^2(\ +\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots.+\nu N)\frac{\partial Fa}{\partial a} \\
+ \quad & \frac{b^3}{1.2}(\tfrac{1}{3}-\alpha^2 A-\beta^2 B-\gamma^2 C-\ldots.-\nu^2 N)\frac{\partial^2 Fa}{\partial a^2} \\
- \quad & \frac{b^4}{1.2.3}(\ +\alpha^3 A+\beta^3 B+\gamma^3 C+\ldots.+\nu^3 N)\frac{\partial^3 Fa}{\partial a^3} \\
+ \quad & \frac{b^5}{1.2.3.4}(\tfrac{1}{5}-\alpha^4 A-\beta^4 B-\gamma^4 C-\ldots.-\nu^4 N)\frac{\partial^4 Fa}{\partial a^4} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Da diese Reihe convergent ist, so wird der Fehler Δ um so geringer sein, je mehre von den ersten Gliedern der Entwicklung verschwinden. Man kann nun die $2n$ ersten Potenzen von b dadurch vernichten, dafs man ihre Coefficienten gleich Null setzt; auf diese Weise erhält man zwischen den $2n$ Unbekannten $A, B, C, \ldots . N$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \nu$ folgende $2n$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + C + \ldots . + N, \\
0 &= \alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots . + \nu N, \\
\tfrac{1}{3} &= \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C + \ldots . + \nu^2 N, \\
0 &= \alpha^3 A + \beta^3 B + \gamma^3 C + \ldots . + \nu^3 N, \\
\tfrac{1}{5} &= \alpha^4 A + \beta^4 B + \gamma^4 C + \ldots . + \nu^4 N, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \alpha^{2n-1} A + \beta^{2n-1} B + \gamma^{2n-1} C + \ldots . + \nu^{2n-1} N.
\end{aligned}$$

Der noch bleibende Fehler ist

$$\Delta = \frac{b^{2n+1}}{3.4.5\ldots . 2n}\left(\frac{1}{2n+1} - \Sigma \alpha^{2n} A\right)\frac{\partial^{2n} Fa}{\partial a^{2n}} - \frac{b^{2n+2}}{3.4.5\ldots . 2n+1}\Sigma \alpha^{2n+1} A . \frac{\partial^{2n+1} Fa}{\partial a^{2n+1}} + \ldots .,$$

wo wir uns, der Kürze wegen, des Summenzeichens bedient haben, dessen Kraft sich auf die Elemente α und A erstreckt.

§. 2.

Die Elimination der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \nu$ aus den obigen Gleichungen kann auf verschiedene Weise geschehen; wir schlagen dazu folgenden Weg ein. Es sei

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2 - 1)^n = p x^n + q x^{n-2} + r x^{n-4} + \ldots .$$

Dann ist, wenn m eine positive ganze Zahl, kleiner als n, bedeutet,

$$\int_0^1 x^m \frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2 - 1)^n \partial x = \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}(x^2 - 1)^n,$$

sobald nach der Differenziation für x die Grenzwerthe gesetzt werden. Für $x = 1$ ist aber ein solcher Differenzialquotient immer Null, da er noch den Factor $x^2 - 1$ enthält; und für $x = 0$ ist er auch Null, wenn n und m entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Führt man die Integration wirklich aus, so ergiebt sich also, dafs in diesen Fällen:

$$\frac{p}{n+m+1} + \frac{q}{n+m-2} + \frac{r}{n+m-3} + \ldots . = 0.$$

Multiplicirt man nun die $n+1$ste der obigen $2n$ Gleichungen mit p, die $n-1$ste mit q, die $n-3$te mit r u. s. w., und addirt dann alle so verwandelten Gleichungen, so ergiebt sich links Null und rechts $\Sigma A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n$. Verfährt man auf gleiche Weise mit den Gleichungen $(n+2)$, (n), $(n-2)$, ..., ferner mit $(n+3)$, $(n+1)$, $(n-1)$, ..., und schreitet so fort, bis man endlich die Operation mit der letzten Gleichung beginnt, so bereitet man sich folgende n Gleichungen:

$$0=\Sigma A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n, \quad 0=\Sigma \alpha A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n, \quad 0=\Sigma \alpha^2 A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n, \ldots$$
$$\ldots\ldots \quad 0=\Sigma \alpha^{n-1} A \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1),$$

aus denen die Elimination jeden der n Differenzialquotienten

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(\alpha^2-1)^n, \quad \frac{\partial^n}{\partial \beta^n}(\beta^2-1)^n, \quad \frac{\partial^n}{\partial \gamma^n}(\gamma^2-1)^n, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^n}{\partial \nu^n}(\nu^2-1)^n$$

gleich Null ergeben mufs; wie leicht in die Augen fällt. Dieses Resultat zeigt, dafs α, β, γ, ... ν die n Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n = 0$$

sind, welche, wenn x^n von seinem Factor befreit wird, diese Gestalt animmt:

$$x^n-\frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{1.(2n-1)2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}}{1.2\,(2n-1)\,(2n-3)\,2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\,x^{n-6}}{1.2.3\,(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,2^3}-\ldots\ldots=0.$$

§. 3.

Wie aus den n ersten Gleichungen in §. 1. die Gröfsen A, B, C, ... N bestimmt werden, ist bekannt; z. B. zeigt es auf eine einfache Weise Cauchy in seiner algebraischen Analysis. Bezeichnet man die linken Seiten dieser Gleichungen 1, 0, $\frac{1}{3}$, 0, ... entsprechend durch k_0, k_1, k_2, k_3, ..., so findet man z. B.

$$A=\frac{(k-\beta)(k-\gamma)(k-\delta)\ldots\ldots(k-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots\ldots(\alpha-\nu)},$$

wenn nämlich die Multiplicationen im Zähler wirklich ausgeführt und an die Stelle der Exponenten von k die entsprechenden Zeiger gesetzt werden. Bezeichnet man $\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n$ durch φx und $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$ durch $\varphi' x$, und das Setzen von $x=\alpha$ in diesem Differenzialquotienten durch $\varphi'\alpha$, so übersieht man bald, dafs sich die Werthe von A, B, C, ... N in dieser Form darstellen lassen:

$$A=\frac{1}{2\varphi'\alpha}\int_{-1}^{1}\varphi'\alpha\,\partial\alpha, \quad B=\frac{1}{2\varphi'\beta}\int_{-1}^{1}\varphi'\beta\,\partial\beta, \quad C=\frac{1}{2\varphi'\gamma}\int_{-1}^{1}\varphi'\gamma\,\partial\gamma, \ldots$$
$$\ldots\ldots \quad N=\frac{1}{2\varphi'\nu}\int_{-1}^{1}\varphi'\nu\,\partial\nu,$$

wo unter den Integrationszeichen aber die Integrationsbuchstaben nicht verwechselt werden dürfen, was in andern Fällen erlaubt ist.

Die Berechnung dieser Gröfsen läfst sich nach Gaufs noch etwas vereinfachen. Es ist nämlich

$$\int_{-1}^{1} \varphi' \alpha \, \partial \alpha = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi y - \varphi x}{y - x} \partial y$$

für $x = \alpha$; denn die Differenz $\varphi y - \varphi x$ enthält den Factor $y - x$, also nur positive Potenzen von x, und φx wird für $x = \alpha$ zu Null, wodurch dann bei der Division φy nur den Factor $y - \alpha$ verliert. Ferner ist

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi y - \varphi x}{y - x} \partial y$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi y}{y - x} \partial y - \varphi x \int_{-1}^{1} \frac{\partial y}{y - x} = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi y}{y - x} \partial y + \varphi x \log \frac{1 + x^{-1}}{1 - x^{-1}}.$$

Multiplicirt man also φx mit $\log \frac{1 + x^{-1}}{1 - x^{-1}}$, oder mit $2(x^{-1} + \frac{1}{3} x^{-3} + \frac{1}{5} x^{-5} + \ldots)$, so werden in diesem Producte alle Potenzen von x mit negativen Exponenten durch dieselben Potenzen dieser Gröfse in dem Integral $\int_{-1}^{1} \frac{\varphi y}{y - x} \partial y$ aufgehoben, da auf der linken Seite der letzten Gleichung x nur mit positiven Exponenten erscheinen kann; behält man daher von diesem Producte nur die Potenzen von x mit positiven Exponenten bei, und setzt dann für x nach einander α, β, γ, ... ν, so findet man die Zähler der Coefficienten A, B, C, ... N. Dafs bei diesen Coefficienten der erste dem letzten, der zweite dem vorletzten u. s. w. gleich sein mufs, ergiebt sich einfach aus dem ersten Werthe für Δ in §. 1., wenn man $+b$ mit $-b$ vertauscht.

Berlin, im Juli 1836.