26.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Steiner* zu Berlin.)

---

1. **S**ind beliebige n Ebenen A, B, C, D, ... gegeben (z. B. die Ebenen, in welchen die Seitenflächen irgend eines Polyëders liegen), und legt man durch irgend einen festen Punct K eine willkührliche Ebene P, nennt die Winkel, welche diese mit ihnen bildet, beziehlich α, β, γ, δ, ..., und multiplicirt die Cosinus dieser Winkel beziehlich mit beliebigen gegebenen Gröfsen a, b, c, d, ...: so wird die Summe dieser Producte irgend einen bestimmten Werth S haben, so dafs

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + d\cos\delta + \ldots = S$$

ist. Soll nun die Ebene P um den festen Punct K sich so bewegen, dafs (wenn auch die Winkel α, β, γ, ... sich ändern) die Summe S constant bleibt, so berührt sie stets irgend einen geraden Kegel K (zweiten Grades), dessen Axe Q fest ist, d. h., die unzähligen Kegel K, welche auf diese Weise entstehen, wenn man die beschreibende Ebene in immer anderer ursprünglichen Lage annimmt, wo zugleich der Werth S sich ändert, haben eine gemeinschaftliche Axe Q. Die Grenzen der Kegelschaar sind einerseits die Axe Q, wo der Erzeugungswinkel des Kegels $=0$ ist, und andererseits diejenige Ebene R, welche im Puncte K auf der Axe Q senkrecht steht, und wo der Erzeugungswinkel $=\frac{1}{2}\pi$ ist. In diesen Grenzen erreicht der Werth S sein Minimum und Maximum. (Die Ebene R ist demnach einzig in ihrer Art, indem ihr allein ein bestimmter Werth S_1 entspricht; andererseits entspricht allen Ebenen, welche durch die Axe Q gehen, gemeinschaftlich ein eigenthümlicher Werth S_2, und diese zwei Werthe sind also unter allen der kleinste und gröfste, oder die Grenzen von S.)

Nimmt man statt K irgend einen andern festen Punct K_1 an, so sind natürlicherweise die neuen Grenzen Q und R den vorigen parallel, d. i. $Q_1 \# Q$ und $R_1 \# R$.

2. Wenn in der Ebene irgend ein Netz von geradlinigen convexen Vielecken gegeben ist, dessen Grenze selbst ein convexes Vieleck ist, so soll gezeigt werden, ob allemal ein analoges Netz möglich sei, welches in

der Zahl, Gattung und Zusammenfügung der Vielecke mit jenem übereinstimmt, aber die Eigenschaft hat, dafs sich um jedes Vieleck insbesondere ein Kreis beschreiben läfst.

3. Es seien AB (Fig. 5.) die grofse Axe, C, D die Brennpuncte und M der Mittelpunct einer Ellipse. Wird die Axe durch irgend einen Punct X, der zwischen den Brennpuncten liegt, in zwei Abschnitte AX, BX getheilt, und beschreibt man mit denselben, beziehlich um die Brennpuncte C, D, Kreise, so schneiden sich diese bekanntlich in zwei Puncten a, b der Ellipse; und beschreibt man umgekehrt mit AX, BX, beziehlich aus D, C, Kreise, so schneiden sich auch diese in zwei Puncten α, β, die in der Ellipse liegen, und es sind sowohl a und α, als b und β Endpuncte eines Durchmessers derselben; und zwar sind die Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$ einander gleich und bilden mit der Axe AB gleiche Winkel. Gleicherweise entsprechen jedem anderen Puncte Y der Axe, der zwischen C und D liegt, in der Ellipse vier bestimmte Puncte a_1, b_1, α_1, β_1, oder zwei einander gleiche, und gegen die Axe AB gleich geneigte Durchmesser $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$. Verlangt man nun zu wissen, welche Lage zwei Puncte X, Y in der Axe haben müssen, damit die ihnen entsprechenden Durchmesser einander gegenseitig zugeordnet sind, d. h. damit sowohl $a\alpha$ und $a_1\alpha_1$, als $b\beta$ und $b_1\beta_1$ conjugirte Durchmesser der Ellipse sind: so wird man finden, dafs sie nach einem bestimmten Gesetze von einander abhängig sind; welches durch folgende Construction übersichtlich und klar sich darstellt. Über dem halben Abstande der Brennpuncte von einander, z. B. über MD, beschreibe man einen Halbkreis MED, nehme in demselben einen beliebigen Punct E, ziehe die Sehnen ME, DE, und trage diese vom Mittelpuncte M aus, auf entgegengesetzten Seiten, auf der Axe ab, z. B. $ME = MX$, und $DE = MY$: so werden die Puncte X, Y allemal der verlangten Bedingung genügen. (Ist der Punct E die Mitte des Halbkreises, so fallen die zwei Paare conjugirte Durchmesser in eines zusammen, und diese sind alsdann die gleichen conjugirten Durchmesser. Ähnliches findet Statt, wenn der Punct E in einem Endpuncte M oder D des Halbkreises angenommen wird, in welchem Falle ihm die Axen der Ellipse entsprechen.)

Wie lautet der analoge Satz für die Hyperbel?

4. Man denke sich eine beliebige Hyperbel; C und D seien ihre Brennpuncte, A ein Scheitel ihrer Hauptaxe und M ihr Mittelpunct. Nimmt

man in der Hyperbel irgend einen Punct E an, z. B. in dem Zweige, welcher den Brennpunct C umschliefst, zieht die Leitstrahlen CE, DE, trägt auf jedem, von E aus, die halbe Axe MA ab, jedoch beim ersten CE, auf dessen Verlängerung über E hinaus: so liegen die Endpuncte F, G der abgetragenen Strecken ($EF = EG = MA$) allemal in demjenigen Durchmesser der Hyperbel, welcher dem Durchmesser ME zugeordnet ist. Oder: Bewegt sich ein gleichschenkliges Dreieck FEG, dessen Schenkel FE, GE der Gröfse nach constant sind, so, dafs seine drei Seiten FE, FG, GE, oder deren Verlängerungen, stets beziehlich durch drei feste Puncte C, M, D einer Geraden gehen, von denen der eine M, um welchen die Grundlinie FG sich dreht, in der Mitte zwischen den zwei andern C, D liegt: so beschreibt seine Spitze E eine Hyperbel, welche M zum Mittelpunct und C, D zu Brennpuncten hat, und deren halbe Hauptaxe (MA) den constanten Schenkeln des Dreiecks gleich ist, und von welcher endlich der Strahl ME und die Grundlinie MGF stets ein Paar conjugirte Durchmesser sind.

Wie lautet der analoge Satz für die Ellipse?

Auch bei den sphärischen Kegelschnitten findet ein analoger Satz Statt, der nur in Hinsicht der conjugirten Durchmesser (ME, MGF) von den Sätzen in der Ebene abweicht.

5. Zwei Seiten ac, bc eines beliebigen gegebenen Dreiecks acb beziehlich durch zwei Puncte x, y so zu theilen, dafs $ax : cy = ac : bc$ (wo dann immer auch $cx : by = ac : bc$ und also der untere Abschnitt der einen Seite sich zum oberen der andern verhält, wie jene Seite zu dieser), und dafs zugleich die Gerade xy, welche die Theilungspuncte verbindet, ein Minimum sei. (Diese Aufgabe ist geometrisch zu lösen.)

6. „Sind von zwei beliebigen geradlinigen ebenen Vielecken, einem N Eck und einem N_1 Eck, die Grundlinien a, a_1 nebst der Summe ihrer Umfänge, $U + U_1$ gegeben, so ist die Summe ihrer Flächeninhalte, $F + F_1$, dann am gröfsten, wenn 1) jedes Vieleck einem Kreise eingeschrieben ist; wenn 2) die unbestimmten Seiten in jedem, für sich betrachtet, einander gleich sind, so dafs also diese Seiten in jedem Vieleck von einem Kreise berührt werden können; und wenn endlich 3) diese, zum Theil eingeschriebenen zwei Kreise einander

gleich sind." Und umgekehrt: „Sind die Grundlinien a, a_1 nebst der Summe der Inhalte $F+F_1$ gegeben, so ist die Summe der Umfänge $U+U_1$ ein Minimum, wenn die Vielecke den nämlichen drei genannten Bedingungen genügen."

Dieser allgemeine Satz findet natürlicherweise auch für den Fall Statt, wo die zwei Vielecke von gleicher Gattung sind, d. h., wo die Seitenzahl $N=N_1$ ist.

Wird insbesondere $N=N_1=3$ angenommen, so entspricht der Satz derjenigen Aufgabe (4.), welche ich im XIV. Bd. S. 89 dieses Journals vorlegte, von der aber bis jetzt, wie es scheint, noch keine befriedigende Lösung eingegangen ist.

Der vorstehende Satz hat, unter andern, auch die zwei nachstehenden Sätze zur Folge.

7. „Sind die geraden Grundlinien a, a_1, nebst der Summe der Umfänge $(U+U_1)$ zweier beliebigen Figuren A, A_1 (deren Begrenzung nämlich, aufser jenen Grundlinien, ganz beliebig, gerad- krumm- oder gemischtlinig sein darf) gegeben, so ist die Summe ihrer Flächeninhalte $(F+F_1)$ dann am gröfsten, wenn beide Figuren Segmente gleicher Kreise sind." Und umgekehrt: „Sind die Grundlinien a, a_1 nebst der Summe der Flächeninhalte gegeben, so ist unter der nemlichen Bedingung die Summe der Umfänge beider Figuren ein Minimum."

8. I. „Sind die Grundlinien a_1, a_2, a_3, ... und die Summe der Umfänge $U_1+U_2+U_3+\dots$ beliebig vieler ebener geradliniger Vieleke N_1, N_2, N_3, ... gegeben, so ist die Summe ihrer Flächeninhalte $F_1+F_2+F_3+\dots$ ein Maximum, wenn 1) jedes Vieleck einem Kreise eingeschrieben ist; wenn 2) die unbestimmten Seiten eines jeden unter sich gleich sind, und somit (vermöge I.) von einem Kreise berührt werden; und wenn 3) alle diese, zum Theil eingeschriebenen Kreise einander gleich sind." Und umgekehrt: „Wenn die Grundlinien der Vielecke nebst der Summe ihrer Inhalte gegeben sind, so ist, unter den nämlichen drei Bedingungen, die Summe ihrer Umfänge ein Minimum."

II. „Sind die geradlinigen Grundlinien a_1, a_2, a_3, ... und die Summe der Umfänge $U_1+U_2+U_3+\dots$ beliebiger Fi-

guren A_1, A_2, A_3, ... gegeben, so ist die Summe ihrer Inhalte ein Maximum, wenn sie sämmtlich Segmente gleicher Kreise sind." Sind die Grundlinien und die Summe der Flächeninhalte gegeben, so ist, unter derselben Bedingung, die Summe der Umfänge ein Minimum."

Anmerkung. Die Schwierigkeiten, welche die Sätze über Maximum und Minimum bei geometrischen Gegenständen häufig darbieten, und die nicht selten der Art sind, daſs sie den gewöhnlichen allgemeinen Regeln Trotz bieten, reitzten mich zu dem Versuche, solche Sätze rein geometrisch zu behandeln, um auf diesem Wege ihren eigentlichen Grund zu erforschen. Meine Bemühungen wurden bei vielen Sätzen mit dem besten Erfolge belohnt; und blieben sie auch in Rücksicht anderer Sätze vor der Hand noch fruchtlos, so bin ich doch der Meinung, daſs es in den meisten Fällen gelingen werde, ein günstiges Resultat zu erhalten; womit dann zugleich der Vortheil verbunden sein wird, daſs das wahre Wesen der Sätze mehr aufgeklärt, d. h. ihr Ursprung, oder die nothwendige Bedingung ihrer Existenz nachgewiesen wird, welches Alles bei der andern Methode weder gefordert, noch in derselben Einfachheit erlangt werden kann. Freilich wird die letztere Methode jeden aufgestellten Satz sofort auch leicht beweisen, sobald man nämlich sieht, worauf es eigentlich ankommt; welche Gröſsen in Rechnung zu bringen sind, u. s. w.: aber dieses ist unstreitig weniger wichtig, als jenes, nämlich den Satz aus seinen primitiven Gründen auf die einfachste Art herzuleiten, und dadurch seinen natürlichen Zusammenhang mit andern Sätzen, oder die Abhängigkeit der Sätze von einander, nachzuweisen. Zu dem giebt es viele Sätze, die ausschlieſslich nur durch geometrische Betrachtungen, und als Folgen einer stufenweisen Entwickelung, sich mit gehöriger Eleganz beweisen lassen. So z. B. ergab es sich, daſs die vorstehenden Sätze (6., 7. und 8.) im Grunde nur auf dem einfachen Elementarsatze beruhen: „Daſs unter den Sehnen eines Kreises, der Durchmesser die gröſste sei," wiewohl sie beim ersten Anblick viel schwieriger zu sein scheinen, und besonders, als Aufgaben gestellt, noch eher zu verwickelten Rechnungen Anlaſs geben könnten, aus denen die einfache Bedingung, welche die Sätze enthalten, schwer zu erkennen sein dürfte. Jetzt mögen sie leichter zu beweisen sein.

Da meine Untersuchungen über die oben genannten Gegenstände sich zu sehr ausdehnten, und mich theilweise auf Hindernisse führten, deren Überwindung mir noch nicht gelungen ist: so habe ich mich entschlossen, vorerst nur einen Abschnitt, welcher insbesondere das „Isoperimetrische" (in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume) enthalten wird, auszuarbeiten und demnächst in einer kleinen Schrift bekannt zu machen. Die genannten Sätze sind dem Inhalte dieser Schrift entnommen, wo sie auf die angedeutete Art bewiesen werden. Gleicherweise werden in derselben, durch eben so elementare, als der Natur des Gegenstandes angemessene, geometrische Betrachtungen mehrere andere interressante Sätze bewiesen werden, welche jeder andern Betrachtungsweise, wie es wenigstens nach den bisherigen Leistungen den Anschein hat, weniger leicht zugänglich sein möchten. Dahin rechne ich, — außer den obigen Sätzen und denen, welche den Aufgaben im vorhergehenden Bande dieses Journals (B. XIV. S. 88 Aufg. 2. *a.c.e;* 3. *a.c.e;* 6., 7.) entsprechen — namentlich die Sätze über regelmäfsige sphärische Figuren, indem bis jetzt, so viel mir bekannt, noch auf keine Weise die Frage erledigt ist, ob bei diesen Figuren, wenn sie gleichen Umfang haben, diejenige, welche mehr Seiten hat, auch gröfseren Inhalt habe, wie solches bei den regelmäfsigen Figuren in der Ebene der Fall ist; ja nicht einmal für das sphärische Dreieck und Viereck ist diese Frage entschieden. In der genannten Schrift wird die Frage allgemein, und ich darf wohl sagen, auf die einfachste Art beantwortet, was ohne Zweifel auch jeder Unparteiische zugestehn wird. Übrigens sind die in Rede stehenden sphärischen Sätze, nebst den neuen Beweisen der analogen Sätze in der Ebene, der Gegenstand einer, am 7. Dec. v. J. in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.

Druckfehler im 14ten Bande.

Pag. 279 in secundo mille ante columnam loco 64 ponendum 67; apud numeros 633, 1478 loco 7, 4 legendum 6, 5.

In diesem Bande.

Seite 313 Zeile 9 v. u. und Seite 315 Zeile 5 v. o. lies gedreht statt gedacht.
— 315 — 12 v. u. lies Kräfte-Paare statt Kräfte-Achsen.
— 316 — 8 v. u. lies Ebenen statt Ebene.

D.