SULLA IDENTITÀ CREMONIANA DI DUE CURVE PIANE.

Memoria di **G. Marletta** (Catania).

Adunanza del 14 luglio 1907.

Questo lavoro è diviso in due capitoli. Nel primo, data una condizione sufficiente affinchè una corrispondenza biunivoca fra i punti di due curve piane, sia subordinata ad una trasformazione cremoniana fra i piani di queste, si assegna qualche limite superiore dell'ordine che può avere una trasformazione cremoniana che muti due date curve l'una nell'altra. Si dà, inoltre, qualche condizione sufficiente affinchè una data curva sia d'ordine minimo.

Nel secondo capitolo si dimostra un teorema che dà l'indice delle curve aggiunte d'indice più alto ad una data curva d'ordine minimo. Ne seguono i tipi, cremonianamente distinti, di curve piane, e, in particolare, alcuni teoremi interessanti circa le curve prive di tutti i sistemi aggiunti d'indice maggior d'uno. Infine si dà un cenno intorno a criterî da seguire, per poter decidere se una data corrispondenza biunivoca fra i punti di due curve, sia o no subordinata ad una trasformazione cremoniana fra i piani di queste.

I.

1. Date due curve algebriche c e c' dei piani π e π', è noto che l'essere i loro punti riferiti biunivocamente, non è condizione sufficiente, in generale, affinchè esista una trasformazione cremoniana T fra i piani π e π', la quale muti c in c'; cioè, come brevemente diremo, affinchè le due curve siano *cremonianamente identiche*.

È chiaro poi, che se fra i punti di c e di c' esiste una corrispondenza biunivoca ω, la quale trasformi la serie secata su c da una rete omaloidica di π, in quella secata su c' da una rete omaloidica di π', esiste senz'altro una trasformazione cremoniana fra π e π', alla quale è subordinata la corrispondenza ω.

2. Fra i punti delle due curve c e c' passi la corrispondenza biunivoca ω, e siano n e n' gli ordini delle due curve. Indichiamo con φ e φ_1 due curve aggiunte d'ordine $n-3$ a c, e con φ' e φ'_1 le curve aggiunte di c' che ad esse si possono far corrispondere in virtù di ω. Ammettiamo che esista su c la serie secata dalle curve l aggiunte d'ordine $n-4$, e indichiamo con r e r_1 due rette generiche del piano π. Si ponga

inoltre:

$$\varphi \equiv (l r), \quad \varphi_1 \equiv (l_1 r_1).$$

Se l'ordine M della serie secata su c dal sistema $|l|$, è maggiore del grado N di $|\varphi|$, allora è chiaro che fissata una curva l, alle ∞^2 curve φ composte di l e delle rette di π, corrispondono ∞^2 curve φ' ciascuna spezzata in una curva fissa l', e in una variabile ρ'. Dunque possiamo porre:

$$\varphi' \equiv (l' \rho') \quad \text{e} \quad \varphi'_1 \equiv (l'_1 \rho'_1).$$

Facendo variare r_1, variano $n - 3$ degli N punti $\varphi\varphi_1$, onde siccome in π' varierà ρ'_1, questa secherà φ' in $n - 3$ punti (variabili). Variando contemporaneamente r e r_1, variano $2(n - 4) + 1$ degli N punti $\varphi\varphi_1$, onde il numero dei punti (variabili) $\rho' l'_1$, $\rho'\rho'_1$, $\rho'_1 l'$ è anch'esso $2(n - 4) + 1$. Ma il numero dei punti $\rho'_1 \varphi'$, cioè $\rho'_1 l' + \rho'_1 \rho'$ abbiamo visto essere eguale ad $n - 3$, onde il numero dei punti $\rho' l'_1$ è $n - 4$. E siccome, inoltre, i punti $\rho' l'_1 + \rho' \rho'_1$ sono $n - 3$, così deduciamo che le curve ρ' e ρ'_1 hanno un sol punto (variabile) comune. Concludiamo:

Condizione sufficiente affinchè una corrispondenza biunivoca ω fra i punti di due curve piane c e c', sia subordinata ad una trasformazione cremoniana fra i piani di queste, è che i sistemi $|\varphi|$ e $|\varphi'|$ abbiano lo stesso grado N, che esista su c, per es., la serie secata dalle curve aggiunte d'ordine $n - 4$, essendo n l'ordine di c, e che l'ordine di questa serie sia maggiore di N.

3. Dal teorema dimostrato nel § precedente, è facile dedurre che

Se due curve piane dello stesso ordine $n > 4$ dotate di $h \geqq 0$ punti doppi, sono di genere $p > \frac{1}{2} n(n - 7) + 10$, allora una corrispondenza biunivoca che passi fra i punti delle due curve, è subordinata sempre ad una collineazione fra i piani di queste [1]).

4. Date due curve piane c e c' crem. id., è certamente di qualche interesse, trovare un limite superiore dell'ordine che può avere una trasformazione cremoniana T fra i piani delle due curve, nella quale queste siano corrispondenti.

Indichiamo con m l'ordine di T, cioè l'ordine delle curve ρ che corrispondono alle rette r' di π', e con $a_i (i = 1, 2, \ldots)$ il numero dei punti i-pli [2]) (fondamentali) per le curve ρ. Come è noto, fra i numeri m e a_i passano tre relazioni (una conseguenza delle altre due), una delle quali è la seguente:

$$\sum_i i a_i = 3(m - 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Indichiamo con a'_i il numero dei punti i-pli della rete $|\rho|$, posti sulla curva c, onde è $0 \leqq a'_i \leqq a_i$; inoltre rappresenti $a_i^{(s)}$ il numero dei punti i-pli per $|\rho|$ e s-pli per c, onde è $a'_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)} + \cdots$.

---

[1]) Per $h = 0$ ovvero $h = 1$ questo teorema era noto: MARLETTA, *Sulla identità proiettiva di due curve algebriche.* [Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania, s. IV, vol. XIX (1905)]. D'ora in poi scriveremo crem. id. per cremonianamente identiche.

[2]) Un punto multiplo *singolare,* sarà considerato come *più* punti multipli *successivi.* Ciò posto, tutti i ragionamenti che seguono sono rigorosi. [Vedi per es., BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi, con Appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, E. Spoerri, 1907), pp. 383 e 386].

Siccome T trasforma c in c', deve essere:

$$(2)\qquad mn - \sum_i [i a_i^{(1)} + 2 i a_i^{(2)} + 3 i a_i^{(3)} + \cdots] = n',$$

essendo, al solito, n e n' gli ordini di c e di c' rispettivamente.

Indichiamo con $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2$ le più alte multiplicità di c, e con s_0 e s_1 quelle delle curve ρ nelle prime due di queste.

Allora la (2) si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} &\sum_i i[a_i^{(1)} + a_i^{(2)} + a_i^{(3)} + \cdots + a_i^{(\alpha_2)}] \\ &+ \sum_i i[\qquad a_i^{(2)} + a_i^{(3)} + \cdots + a_i^{(\alpha_2)}] \\ &+ \sum_i i[\qquad\qquad a_i^{(3)} + \cdots + a_i^{(\alpha_2)}] \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \sum_i [\qquad\qquad\qquad a_i^{(\alpha_2)}] + \alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 = mn - n'. \end{aligned}$$

Ma ciascuna di queste $[\ldots]$ è $\leqq a_i' \leqq a_i$, onde per la (1) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} mn - n' &\leqq \alpha_2[3(m-1) - (s_0 + s_1)] + s_0\alpha_0 + s_1\alpha_1 \\ &= 3(m-1)\alpha_2 + s_0(\alpha_0 - \alpha_2) + s_1(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= (m-1)\alpha_2 + (m-1)\alpha_0 - (m-1)(\alpha_0 - \alpha_2) \\ &\quad + (m-1)\alpha_1 - (m-1)(\alpha_1 - \alpha_2) + s_0(\alpha_0 - \alpha_2) + s_1(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Ma è $s_0 \leqq m - 1$, e $s_1 \leqq m - 1$, dunque:

$$mn - n' \leqq (m-1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2),$$

cioè:

$$mn - m(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) \leqq n' - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2),$$

ed anche [3]):

$$(3)\qquad m[n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)] \leqq n' - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2).$$

Se si suppone $n > \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, possiamo scrivere:

$$(4)\qquad m \leqq \frac{n' - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)}{n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Concludendo:

Se m è l'ordine di una trasformazione cremoniana T fra i piani π e π', la quale trasformi una curva c di π le cui più alte multiplicità sono $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2$ in una curva

---

[3]) In particolare sia c' una retta, e sia $c \equiv \rho$; si ha:

$$n[n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)] \leqq 1 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2),$$

da cui:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) - 1 \geqq n \geqq 1.$$

A più forte ragione si ha dunque:

$$3\alpha_0 \geqq n + 1, \quad \text{cioè} \quad \alpha_0 \geqq \frac{n+1}{3}.$$

Vedi NOETHER, *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen* [Math. Annalen, t. V (1872), pp. 635-639].

c' di π', è sempre $m \leqq \frac{n'-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}{n-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}$, *essendo* $n>\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$ *e* n' *gli ordini di* c *e di* c'.

5. La (3) per $n=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$, diventa $n' \geqq \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$, cioè $n' \geqq n$. Ciò posto, e in virtù del teorema precedente, deduciamo:

Condizione sufficiente affinchè una curva c della quale le multiplicità più elevate sono $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2$, sia d'ordine minimo [4]*, è che sia* $n \geqq \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$.

Infatti la (4) dà $m=0$ per $n'<n$.

Per es., è d'ordine minimo, ogni curva piana d'ordine $n \geqq 6$, e dotata di soli punti doppî.

6. Per $n=n'$ la (4) dà $m \leqq 1$; dunque:

Se una curva c avente per multiplicità più elevate $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2$, ha l'ordine $n>\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$, allora ogni trasformazione cremoniana del suo piano, che la trasformi in una curva c' dello stesso ordine n, è una collineazione.

In altri termini:

Se di due curve piane dello stesso ordine n, una ha per multiplicità più elevate $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2$, ed è $n>\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$, le due curve o sono collineari, o non sono crem. identiche.

Per es., se di due curve piane dello stesso ordine $n>6$, una è dotata di soli punti doppî, le due curve o sono collineari, ovvero non esiste alcuna trasformazione cremoniana dei loro piani, che le trasformi l'una nell'altra.

7. Consideriamo la relazione (3) del § 4, cioè:

$$m[n-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)] \leqq n'-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2).$$

Sia $n'=n=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$: del doppio segno, allora, si dovrà considerare solamente quello di eguaglianza. Affinchè ciò si possa fare, è necessario (§ 4) che sia

$$s_0(\alpha_0-\alpha_2)+s_1(\alpha_1-\alpha_2)=(m-1)(\alpha_0-\alpha_2)+(m-1)(\alpha_1-\alpha_2),$$

e quindi che sia:

1ª $s_0=m-1$ e $s_1=m-1$; ovvero

2ª $s_0=m-1$ e $\alpha_1=\alpha_2$; ovvero

3ª $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2$.

Nell'ipotesi 1ª si ha: $2(m-1) \leqq m$, cioè $m \leqq 2$; nell'ipotesi 2ª le curve ρ hanno come $(m-1)$-plo il punto α_0-plo di c, e tutti gli altri punti base α_2-pli per questa medesima curva. Nella 3ª ipotesi, tutti i punti base di $|\rho|$ sono α_0-pli per la curva c.

Concludendo:

Data una curva c avente per multiplicità più elevate α_0, α_1 e α_2, e d'ordine

---

[4]) S'intende per trasformazioni cremoniane.

$n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, *se una trasformazione cremoniana* T *la muta in una curva* c' *anch'essa d'ordine* n, *allora*:

Per $\alpha_0 \geqq \alpha_1 > \alpha_2$, T *o è una collineazione, ovvero è una trasformazione quadratica, avente come fondamentale il triangolo delle tre multiplicità più elevate di* c.

Per $\alpha_0 > \alpha_1 = \alpha_2$, T *è una trasformazione di* DE JONQUIÈRES, *avente come principale il punto* α_0*-plo di* c, *e tutti gli altri punti fondamentali* α_2*-pli per questa medesima curva.*

Per $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$, *tutti i punti fondamentali di* T *sono* α_0*-pli per la curva* c.

8. Sia c una curva d'ordine n, le cui multiplicità più elevate siano $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2$; supponiamo $n \geqq \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$. Indichiamo con T una trasformazione cremoniana che muti c in una curva c' anch'essa d'ordine n. Se è $n > \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, T è (§ 6) una collineazione, e quindi c e c' hanno uno stesso numero di punti t-pli, ove $t > 1$ è un numero intero qualunque.

Se poi è $n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, allora T: o è (§ 7) una collineazione; ovvero una trasformazione quadratica avente come fondamentale il triangolo delle tre multiplicità più elevate di c; ovvero è una trasformazione d'ordine m con un punto fondamentale $(m - 1)$-plo nel punto α_0-plo di c, e con $2(m - 1)$ punti fondamentali semplici in punti α_2-pli di c; ovvero, infine, T ha tutti i suoi punti base che sono α_0-pli per c.

In ciascuna di queste ipotesi è facile dimostrare che c e c' hanno lo stesso numero di punti t-pli. Concludendo:

Se c *e* c' *sono crem. ident., e sono entrambe d'ordine* $n \geqq \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, *essendo* $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2$ *le multiplicità più elevate di* c, *allora esse hanno lo stesso numero di punti* t*-pli* (*con* $t > 1$).

9. Abbiamo visto (§ 5) che l'essere $n \geqq \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ è condizione sufficiente affinchè c sia una curva d'ordine minimo. Ma, come vedremo in seguito, esistono curve d'ordine minimo per le quali è $n < \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ (essendo evidentemente i punti α_1-plo e α_2-plo infinitamente vicini al punto α_0-plo), onde noi chiameremo *regolare* ogni curva d'ordine minimo per la quale è $n \geqq \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$; mentre ogni altra curva d'ordine minimo, sarà chiamata *irregolare*.

Dal teorema del § precedente segue che una curva d'ordine minimo regolare non è mai crem. id. ad una curva d'ordine minimo irregolare, e che pertanto una curva piana d'ordine qualunque, potrà chiamarsi *regolare* o *irregolare*, secondo che tale è una qualsivoglia curva d'ordine minimo ad essa crem. id. [5]).

10. Sia c una curva piana d'ordine n avente per multiplicità più elevate

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_h \geqq \mu,$$

dove ogni punto α_i-plo è nell'intorno di prim'ordine del punto α_0-plo. Facendo delle

[5]) Data una curva d'ordine $n \geqq \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, con $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 > 6$, non esiste alcuna trasformazione cremoniana del piano della curva, che trasformi questa in una curva dotata di soli punti doppi. Tale è, per es., una curva d'ordine n dotata di un sol punto multiplo secondo $n - 3$.

considerazioni analoghe a quelle del § 4, si ha:

$$
\begin{aligned}
&\sum_i i[a_i^{(1)} + a_i^{(2)} + a_i^{(3)} + \cdots + a_i^{(\mu)}]\\
+&\sum_i i[\qquad a_i^{(2)} + a_i^{(3)} + \cdots + a_i^{(\mu)}]\\
+&\sum_i i[\qquad\qquad a_i^{(3)} + \cdots + a_i^{(\mu)}]\\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+&\sum_i i[\qquad\qquad\qquad a_i^{(\mu)}] + \alpha_0 s_0 + \sum_1^h \alpha_i s_i = mn - n'.
\end{aligned}
$$

Dunque:

$$
\begin{aligned}
mn - n' &\leqq \mu\left[3(m-1) - \sum_1^h s_i - s_0\right] + \alpha_0 s_0 + \sum_1^h \alpha_i s_i\\
&= 3(m-1)\mu + s_0(\alpha_0 - \mu) + \sum_1^h s_i(\alpha_i - \mu)\\
&\leqq 3(m-1)\mu + s_0(\alpha_0 - \mu) + (\alpha_1 - \mu)\sum_1^h s_i .
\end{aligned}
$$

Ma i punti fondamentali s_i-pli di T, sono per ipotesi, nell'intorno di prim'ordine del punto s_0-plo, e quindi è $\sum_1^h s_i \leqq s_0$; dunque a più forte ragione avremo:

$$mn - n' \leqq 3(m-1)\mu + s_0(\alpha_0 - \mu) + s_0(\alpha_1 - \mu).$$

Ed osservando che è sempre $s_0 \leqq m - 1$, deduciamo:

$$mn - n' \leqq (m-1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \mu),$$

cioè:

(1) $$m[n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \mu)] \leqq n' - (\alpha_0 + \alpha_1 + \mu).$$

Se si suppone $n > \alpha_0 + \alpha_1 + \mu$, possiamo scrivere:

(2) $$m \leqq \frac{n' - (\alpha_0 + \alpha_1 + \mu)}{n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \mu)}.$$

Concludendo:

Data una curva c avente $\alpha_0 \geqq \alpha_1$ per multiplicità più elevate, se μ è la multiplicità di c non inferiore a tutte quelle non poste nell'intorno di prim'ordine del punto α_0-plo, allora ogni trasformazione cremoniana T, che muti c in c', è sempre d'ordine $m \leqq \frac{n' - (\alpha_0 + \alpha_1 + \mu)}{n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \mu)}$, essendo $n > \alpha_0 + \alpha_1 + \mu$ e n' gli ordini di c e di c'.

11. Ragionando in modo analogo a come si fece nei §§ 5 e 6 si ottiene:

Condizione sufficiente affinchè una curva c della quale le multiplicità più elevate sono $\alpha_0 \geqq \alpha_1$, sia d'ordine minimo, è che sia $n \geqq \alpha_0 + \alpha_1 + \mu$, essendo μ la multiplicità di c non inferiore a tutte le multiplicità non poste nell'intorno di prim'ordine del punto α_0-plo.

È, per es., d'ordine minimo ogni curva $C^{\alpha_0+\alpha_1+\theta}_{A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2}}$, d'ordine $\alpha_0 + \alpha_1 + \theta$, avente tre (soli) punti multipli secondo $\alpha_0 > \alpha_1 \geqq \alpha_2$, con $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq \alpha_0$ e $\theta > 0$, e tale che i punti A_1 e A_2 siano nell'intorno di prim'ordine del punto A_0.

Inoltre:

Se una curva c avente per multiplicità più elevate $\alpha_0 \geqq \alpha_1$, *ha l'ordine* $n > \alpha_0 + \alpha_1 + \mu$ (μ *essendo la multiplicità di c non inferiore a tutte le multiplicità non poste nell'intorno di prim'ordine del punto* α_0*-plo), allora ogni trasformazione cremoniana del suo piano, che la trasformi in una curva dello stesso ordine n, è una collineazione.*

12. Ponendo $n' = n = \alpha_0 + \alpha_1 + \mu$ nella (1) del § 10, si vede che in questa del doppio segno si dovrà considerare solamente quello di eguaglianza. Affinchè ciò si possa fare è necessario che siano soddisfatte alcune condizioni analoghe a quelle del § 7 di questo stesso capitolo.

Dunque:

Data una curva c d'ordine $n = \alpha_0 + \alpha_1 + \mu$, *avente per multiplicità più elevate* $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_h$ *con i punti* α_i*-pli* ($1 \leqq i \leqq h$) *nell'intorno di prim'ordine del punto* α_0*-plo, e dove* μ *è la multiplicità non inferiore a qualunque altra multiplicità di c non posta nel detto intorno, allora se una trasformazione cremoniana T muta c in una curva c' dello stesso ordine n, i punti fondamentali di T sono nei punti* μ*-pli o* α_r*-pli* ($h \geqq r \geqq 0$) *di c. Precisamente:*

1°) *Se è* $\alpha_0 > \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_k > \mu$ (*con* $k \leqq h$) *e* $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_h = \mu$, *la trasformazione T è o una collineazione, ovvero una trasformazione quadratica avente per punti fondamentali i punti* α_0*-plo,* α_1*-plo e* μ*-plo di c.*

2°) *Se è* $\alpha_1 = \mu$, *T è una trasformazione di* DE JONQUIÈRES *avente il punto principale nel punto* α_0*-plo di c.*

3°) *Se, infine, è* $\alpha_0 = \alpha_1 = \mu$, *allora T soddisfa alla sola condizione di avere i suoi punti fondamentali tutti* μ*-pli per c.*

Si noti che per $\alpha_0 = \alpha_1$ è $h = 1$, e quindi la curva d'ordine minimo c è regolare, onde si cade nel teorema del § 7.

II.

1. Sia C una curva d'ordine $n = 3i + r$ (con $r = 0, 1, 2$), avente per multiplicità più elevata $\alpha_0 \leqq i$. È chiaro che C è (I, § 5) una curva d'ordine minimo (regolare), e che esistono le curve $\varphi^{(i)}$ ad essa aggiunte d'indice i.

Vogliamo ora dimostrare il seguente teorema:

Data una curva d'ordine minimo, d'ordine $n > 1$ *e di massima multiplicità* $\alpha_0 > \dfrac{n}{3}$, *esistono sempre le curve* $\varphi^{(i)}$ *aggiunte d'indice i, essendo* $n - \alpha_0 = 2i$ *ovvero* $n - \alpha_0 = 2i + 1$.

Sia $C^n_{A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} \ldots A_h^{\alpha_h}}$ la data curva d'ordine minimo, con $\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_h > i$, e supponiamo, primieramente, che sia $n - \alpha_0 = 2i + 1$. Dico che esistono le

$$\varphi^{(i)} \equiv \varphi^{\alpha_0 - i + 1}_{A_0^{\alpha_0 - i} A_1^{\alpha_1 - i} \ldots A_h^{\alpha_h - i}} \equiv \sum_1^h (\alpha_s - i - 1) \varphi^1_{A_0 A_s} + \varphi^{\alpha_0 - i + 1 - \Sigma(\alpha_s - i - 1)}_{A_0^{\alpha_0 - i - \Sigma(\alpha_s - i - 1)} A_1 \ldots A_h}.$$

a) Sia h un numero pari: poniamo $h = 2\nu - 2 (> 0)$.

La curva generica della rete $|\lambda^\nu_{A_0^{\nu-1} A_1 \ldots A_h}|$ seca C in un numero di punti che chiameremo n'. Si ha:

$$n'=\nu(\alpha_0+2i+1)-(\nu-1)\alpha_0-\sum\alpha_s=2\nu i+\nu+\alpha_0-\sum\alpha_s$$
$$=hi+2i+\frac{h}{2}+1+\alpha_0-\sum\alpha_s<hi+2i+h+1+\alpha_0-\sum\alpha_s=n+h(i+1)-\sum\alpha_s\leqq n,$$

giacchè è $\alpha_s\geqq i+1$. Dunque si ha: $n'<n$.

La curva generica λ non si può spezzare in una parte fissa e in una irriducibile λ^μ (con $\mu<\nu$) variabile in un sistema (almeno) ∞^2.

Infatti λ^μ dovrebbe passare $\mu-1$ volte per A_0 e semplicemente per $2\mu-2$ al più tra i punti $A_1 \ldots A_h$; ed essa, ponendo $h'=2\mu-2$, secherebbe C in n'' punti, dove è

$$n''=\mu(\alpha_0+2i+1)-(\mu-1)\alpha_0-\sum_1^{h'}\alpha_s=2\mu i+\mu+\alpha_0-\sum_1^{h'}\alpha_s.$$

Ne seguirebbe:

$$n''-n'=\sum_{h'+1}^{h}\alpha_s-2i(\nu-\mu)-(\nu-\mu)\geqq(h-h')(i+1)-2i\left(\frac{h}{2}-\frac{h'}{2}\right)-\left(\frac{h}{2}-\frac{h'}{2}\right)$$
$$=\frac{h}{2}-\frac{h'}{2}>0;$$

cioè $n''>n'$; e ciò è assurdo, dovendo sempre essere $n''\leqq n'$.

L'altro modo di spezzamento della curva λ^ν è, per un noto teorema, in curve di uno stesso fascio. Attribuendo a n'' il significato di poco sopra, è sempre $n''\geqq 2(n-\alpha_0)$, cioè $n''\geqq 4i+2$.

Se dunque fosse $4i+2>n'$, sarebbe $n''>n'$, ed anche questo secondo modo di spezzamento sarebbe impossibile, onde la rete $|\lambda^\nu|$, di curve irriducibili, abbasserebbe l'ordine della curva C, mentre questa è per ipotesi d'ordine minimo. Ne segue che deve essere $4i+2\leqq n'$, cioè

$$(1)\qquad 4i+2\leqq hi+2i+\frac{h}{2}+1+\alpha_0-\sum\alpha_s$$

ed anche

$$i+1+\sum(\alpha_s-i)\leqq\alpha_0-i+\frac{h}{2}.$$

Se ne deduce:

$$\alpha_0-i+1\geqq\sum(\alpha_s-i)+i+2-\frac{h}{2}=\sum(\alpha_s-i)+i+2-h+\frac{h}{2}$$
$$=\sum(\alpha_s-i-1)+i+2+\frac{h}{2},$$

e

$$\alpha_0-i+1=\sum(\alpha_s-i-1)+i+2+\frac{h}{2}+\theta,\quad\text{con}\quad\theta\geqq 0.$$

Per dimostrare l'esistenza delle curve $\varphi^{(i)}$, basta dimostrare l'esistenza delle $\varphi^{\alpha_0-i+1-\Sigma(\alpha_s-i-1)}_{A_0^{\alpha_0-i-\Sigma(\alpha_s-i-1)}A_1\ldots A_h}$. Ora queste certamente esistono; infatti essendo

$$\alpha_0-i+1-\sum(\alpha_s-i-1)=i+2+\frac{h}{2}+\theta,$$

esse sono in numero

$$\delta = 2\left(i + 2 + \frac{h}{2} + \theta\right) - h = 2i + 4 + 2\theta$$

volte infinito, ed è sempre $\delta > 0$.

b) Se h è un numero dispari, posto $h - 1 = 2\nu - 2$, si ragiona come sopra, osservando, in ultimo, che è $\alpha_s \leqq 2i$ (per $s > 0$).

Infine, nell'ipotesi di $n - \alpha_0 = 2i$, si ragiona in modo perfettamente analogo, osservando, quando occorre, che è $\alpha_s < 2i$ (per $s > 0$) [6]).

Si noti che per la dimostrazione deve supporsi $h > 1$, ma è chiaro che il teorema è vero anche per $h = 1$ ovvero $h = 0$. Dunque concludiamo che il teorema sopra enunciato, può ritenersi dimostrato in ogni caso.

2. Da quanto si è detto nel § precedente, segue:

Data una curva d'ordine minimo, d'ordine n e con α_0 per multiplicità più elevata, è i l'indice più alto delle sue curve aggiunte, essendo:

$$n - \alpha_0 = 2i \quad \textit{ovvero} \quad n - \alpha_0 = 2i + 1, \quad \textit{per} \quad \alpha_0 > \frac{n}{3},$$

e

$$n = 3i + r (r = 0, 1, 2) \quad \textit{per} \quad \alpha_0 \leqq \frac{n}{3}.$$

3. Dal teorema del § 1 di questo capitolo, segue senz'altro che se una curva d'ordine minimo è priva dei sistemi aggiunti di tutti gl'indici, essa è necessariamente d'ordine $n = 1$. Se quindi osserviamo che questa condizione è soddisfatta dalla retta, possiamo dire che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva sia trasformabile in una retta, con una trasformazione cremoniana del suo piano, è che per essa manchino gli aggiunti di tutti gl'indici [7]).

---

[6]) È facile dimostrare che in tale ipotesi è sempre:

$$\alpha_0 - i - \sum (\alpha_s - 1) > 0,$$

per $h > 1$.

[7]) FERRETTI, *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p*, etc. [questi Rendiconti, tomo XVI (1902), pp. 236-279].

Circa i sistemi lineari di curve, credo non privo d'interesse il seguente teorema:

Se k e p sono rispettivamente la dimensione virtuale e il genere di un sistema lineare irriducibile, dotato di sistema aggiunto d'indice i, per $k > p - 1$ è sempre $i \leqq \dfrac{k + p - 1}{k - p + 1}$.

Infatti il numero $x \geqq 0$ dei punti comuni a $\varphi^{(i)}$ e a C fuori dai punti base di $|C|$, è dato da:

$$x = n(n - 3i) - \sum (i + t) t, \tag{1}$$

ove n è l'ordine di C, $i + t$ ($\geqq i$) è la multiplicità dei punti base di $|C|$ di multiplicità non inferiore ad i; indicheremo con $\nu < i$ la multiplicità di uno qualunque degli altri punti base. Chiamando D il grado di $|C|$, siccome, com'è noto, è

$$D = n^2 - \sum (i + t)^2 - \sum \nu^2 \quad \text{e} \quad 3n - \sum (i + t) - \sum \nu = k - p + 1,$$

4. Sia C una curva d'ordine minimo di genere p, priva di tutti i sistemi aggiunti d'indice maggior d'uno.

Per il teorema del § 1 di questo capitolo, la curva C potrà appartenere ad uno dei tipi seguenti:

$$a)\ C^{\alpha_0+3}_{A_0^{\alpha_0}A_1^2\dots A_h^2};\qquad b)\ C^{\alpha_0+2}_{A_0^{\alpha_0}};\qquad c)\ C^{n}_{A_0^{\alpha_0}A_1^{\alpha_1}\dots}\quad \text{con}\quad \alpha_0<\frac{n}{3}.$$

Appartenga C al tipo a), e sia $h > 1$: sarà $h = 2\alpha_0 - p + 1$. Inoltre siccome C è una curva d'ordine minimo, deve essere verificata la (1) del § 1 ora citato, cioè nel nostro caso si ha $p \geq 7$ per p dispari, e $p \geq 6$ per p pari.

Nell'ipotesi che C appartenga al tipo c), dalla $3\alpha_0 < n$ si deduce che esistono le curve aggiunte d'indice α_0 a C. Onde è $\alpha_0 = 1$, e quindi nella detta ipotesi questa curva può essere o una C^3, o una C^4 o una C^5. Possiamo dunque concludere che una qualunque curva d'ordine minimo priva (solamente) dei sistemi aggiunti di tutti gl'indici maggior d'uno, appartiene sempre ad uno dei tipi seguenti:

a) $C^{\alpha_0+3}_{A_0^{\alpha_0}(2\alpha_0-p+1)^2}$ [8]), con $p \geq 6$;

a') $C^{\alpha_0+3}_{A_0^{\alpha_0}}$, con $p = 2\alpha_0 + 1$;

a'') $C^{\alpha_0+3}_{A_0^{\alpha_0}A_1^2}$, con $p = 2\alpha_0$;

b) $C^{\alpha_0+2}_{A_0^{\alpha_0}}$, con $p = \alpha_0$;

c) C^3;

c') C^4;

c'') C^5.

5. Sono conseguenze di quanto si è detto nel § precedente, i teoremi che seguono.

1) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva ellittica sia riducibile ad una cubica, mediante una trasformazione cremoniana, è che per essa manchino tutte le aggiunte d'indice superiore ad uno* [9]).

Che la condizione è necessaria, è evidente. Per dimostrare che è anche sufficiente, basta supporre ridotta la data curva ad ordine minimo, e poscia tener presenti, per $p = 1$, i tipi ottenuti in fine del § precedente.

2) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva di genere $p = 2$, sia crem.*

---

la (1) può scriversi:

$$x = D - i\{3n - \sum(i+t) - \sum\nu\} - i\sum\nu + \sum\nu^2,$$

cioè

$$x = D - i(k - p + 1) - \left(i\sum\nu - \sum\nu^2\right).$$

Ma essendo $i > \nu$, è sempre $i\sum\nu - \sum\nu^2 \geq 0$, dunque da $x \geq 0$ segue necessariamente il teorema.

Si può anche dire che *per un sistema lineare irriducibile di curve di genere p, e di dimensione virtuale $k > p - 1$, mancano tutte le curve aggiunte d'indice* $i > \dfrac{k+p-1}{k-p+1}$.

Per $p = 0$ vedi Ferretti, l. c., pag. 241.

[8]) Cioè con $2\alpha_0 - p + 1$ punti doppî.

[9]) Ferretti, l. c.

id. ad una quartica, è che per essa manchino i sistemi aggiunti di tutti gl'indici superiori ad uno.

Si dimostra come il teorema 1).

3) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva di genere $p=3$, sia crem. id. ad una quartica o ad una quintica dotata di punto triplo, è che per essa manchino gli aggiunti di tutti gl'indici superiori ad uno. La curva, poi, sarà crem. id. ad una quintica (dotata di punto triplo), se le sue curve aggiunte (d'indice uno) sono formate con le curve di un fascio; sarà riducibile ad una quartica nell'ipotesi contraria.*

Si dimostra come il teorema 1).

4) *L'assenza dei sistemi aggiunti d'indice maggior d'uno, è condizione necessaria e sufficiente, affinchè una curva di genere $p=4$, sia crem. id. ad una sestica dotata di punto quadruplo, ovvero ad una quintica. Sarà alla sestica, se le curve aggiunte alla data sono formate con le curve di un fascio; sarà alla quintica nel caso contrario.*

Si dimostra come il teorema 1).

5) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva di genere $p=5$, sia crem. id. ad una quintica ovvero ad una curva d'ordine sette dotata di punto quintuplo, è che per essa manchino gli aggiunti di tutti gl'indici superiori ad uno. La curva, poi, sarà crem. id. alla curva del settimo ordine, se le sue curve aggiunte sono formate con le curve di un fascio; sarà crem. id. alla quintica nel caso contrario.*

Si dimostra come il teorema 1).

6. Per poco che si rifletta, è facile comprendere che due curve appartenenti a due diversi dei sette tipi assegnati nel § 4 di questo capitolo, non possono avere i loro punti in corrispondenza biunivoca, a meno che i due tipi non vengano a coincidere per valori particolari di α_0 o di p.

I tipi *a*) e *b*), per es., non possono godere di siffatta proprietà, giacchè mentre una curva appartenente a quest'ultimo tipo, ha la serie canonica composta coi gruppi di una g^1_2, una curva del tipo *a*) non gode di questa proprietà [10]).

Dimostreremo ora che due curve C e C' appartenenti ad uno stesso tipo, sono crem. id. qualora fra i loro punti passi una corrispondenza biunivoca ω. Ciò, intanto, è noto [11]) pei tipi *c*), *c'*), *c''*).

Appartengano C e C' al tipo *b*), siano cioè due curve d'ordine α_0+2 dotate (solamente) di un punto (A e A' rispettivamente) multiplo secondo α_0. Indichiamo con m l'ordine della curva d'ordine minimo λ, avente nel punto A' una multiplicità eguale al suo ordine diminuito di uno, e passante pei punti di C' corrispondenti in virtù di ω,

[10]) È noto che se il sistema aggiunto puro è riduttibile, la curva è iperellittica {Vedi CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi di curve piane* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tomo XLII (1891)], n° 28 *a*)} mentre una retta generica uscente dal punto A_0 di una curva del tipo *a*) incontra questa in *tre* punti.

[11]) SEGRE, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* [Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXIV (1889), pp. 734-756]; MARLETTA, l. c.

ai punti di C posti sopra una retta *non* passante per A [12]). La curva λ seca ulteriormente C' in $m(\alpha_0 + 2) - (m-1)\alpha_0 - (\alpha_0 + 2) = 2m - 2$ punti. Ne segue che esiste sempre una rete omaloidica $|\lambda|$ di curve d'ordine m, con un punto $(m-1)$-plo in A', e passanti per i detti $2m-2$ punti, atta a secare su C' la serie corrispondente in virtù di ω, alla serie *completa* [13]) secata su C dalle rette del suo piano. Dunque (I, § 1) C e C' sono crem. id.

Se, invece, C e C' appartengono al tipo a), consideriamo le curve φ di C passanti per $p-3$ *punti generici* di questa.

Esse sono ∞^2, e la parte variabile λ della curva generica di una siffatta φ, è una curva (irriducibile) che varia in una rete (omaloidica) $|\lambda|$. La serie secata da questa su C, è trasformata, dalla corrispondenza ω, in una serie (speciale) secata su C' da una rete anch'essa evidentemente omaloidica, perchè formata dalle parti variabili delle curve φ' passanti per i $p-3$ punti (generici) omologhi di quelli scelti su C. Ne segue (I, § 1) che C e C' sono crem. id.

Similmente si ragioni se C e C' appartengono al tipo a') o a'').

Da tutto quanto si è detto in questo §, possiamo concludere il seguente teorema:

Una corrispondenza biunivoca fra i punti di due curve piane, ciascuna priva di tutti i sistemi aggiunti d'indice maggior d'uno, è sempre subordinata ad una trasformazione cremoniana fra i piani delle due curve.

Infatti basta ridurre ad ordine minimo ciascuna curva, e poi osservare che queste sono crem. id.

Questo teorema era in sostanza noto se le due curve sono ellittiche, giacchè allora esse sono riducibili [II, § 5, 1)] a cubiche, e sappiamo [14]) che ogni corrispondenza biunivoca fra queste, è subordinata ad ∞^2 trasformazioni quadratiche.

7. Dai teoremi dei §§ 1 e 2 di questo capitolo, segue che ogni curva c dotata di sistema aggiunto d'indice i, ma priva di tutti i sistemi aggiunti d'indice maggiore di i, è sempre crem. id. ad una curva d'ordine minimo, la quale certamente apparterrà ad uno dei tipi seguenti:

1) $C^{\alpha_0+2i+1}_{A_0^{\alpha_0}(A_s)^{\alpha_s}}$ [15]), con $\alpha_0 \geqq \alpha_s > i$, $\alpha_s \leqq 2i$, e $0 \leqq s \leqq h$.

2) $C^{\alpha_0+2i}_{A_0^{\alpha_0}(A_s^{\alpha_s})}$, con $\alpha_0 \geqq \alpha_s > i$, $\alpha_s < 2i$, e $0 \leqq s \leqq h$.

3) $C^{3i+2}_{(\leqq i)}$ [16]).

4) $C^{3i+1}_{(\leqq i)}$.

5) $C^{3i}_{(\leqq i)}$.

Le curve d'ordine minimo appartenenti ad uno qualunque di questi tipi, esclusi i

---

[12]) E quindi λ non può spezzarsi in rette uscenti dal punto A.

[13]) Infatti se questa g^2 fosse contenuta in una g^3, siccome questa sarebbe speciale, anche speciale sarebbe la g^2, e ciò non è (perchè C è iperellittica).

[14]) SEGRE, l. c.

[15]) Se gli h punti A_s sono in numero maggior d'uno, essi sono tutti infinitamente vicini ad A_0.

[16]) Cioè con punti di multiplicità non superiore ad i.

tipi 1) e 2) per $h > 1$, sono evidentemente curve regolari, e quindi certamente non crem. id. se appartengono a tipi diversi (I, § 8). Dunque se noi ci proponiamo di dimostrare che due curve appartenenti a tipi distinti sono sempre non crem. id., basterà considerare due curve C e C', una appartenente al tipo 1) e l'altra al tipo 2).

E infatti, l'*ultima serie canonica* [17]) della curva C', è formata coi gruppi di una stessa g^1_{2i}, mentre ciò non accade per l'ultima serie canonica di C.

Ne segue che una curva piana d'ordine qualunque, potrà chiamarsi *curva del tipo l*), con $l = 1, 2, 3, 4, 5$, se una qualunque curva d'ordine minimo ad essa crem. id. è del tipo l).

È facile dimostrare che è sempre possibile decidere a quale tipo una data curva appartenga, senza ridurre questa ad ordine minimo. Basterà considerare l'ultima serie canonica.

8. Dallo studio fatto fin qui, si possono dedurre dei criterî generali per decidere se una data corrispondenza biunivoca ω fra i punti di due date curve C e C', sia o no subordinata ad una trasformazione cremoniana fra i piani di queste. Ma questi criterî non sono, in generale, semplici, onde noi ci limiteremo ad un solo cenno.

Se l'ultima serie canonica di C (di C') non si riduce ad un sol gruppo, nè è formata coi gruppi di una stessa g^1, la curva C appartiene ad uno dei tipi 1), 3) e 4). Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la corrispondenza ω sia subordinata ad una trasformazione cremoniana, è che ω trasformi l'ultima serie canonica di C nell'ultima serie canonica di C'.

Si noti che non è necessario che alcuna delle due curve sia ridotta ad ordine minimo, e che se d è la dimensione dell'ultima serie canonica di C, basterà verificare se tre gruppi linearmente indipendenti di questa, aventi in comune $d - 2$ punti generici di C, vengano trasformati da ω in gruppi dell'ultima serie canonica di C'. Se poi, in particolare, l'ultima serie canonica di C è completa, basterà verificare la cosa per un sol gruppo.

9. Se l'ultima serie canonica di C è formata coi gruppi di una stessa g^1, converrà ridurre le due curve in altre C_1 e C'_1 d'ordine minimo, ed osservare che se esiste una trasformazione cremoniana T che muti C_1 in C'_1 (e quindi un'altra che muta C in C'), queste devono avere lo stesso ordine, e devono avere eguali le multiplicità più elevate.

Si noti inoltre che T deve essere una trasformazione di DE JONQUIÈRES, avente il punto principale nel punto di multiplicità più elevata di C_1 (di C'_1).

10. Se, infine, l'ultima serie canonica di C (di C') è una g^0, allora converrà ridurre le due curve in altre C_1 e C'_1 d'ordine minimo, e poi considerare la penultima serie canonica. Se questa è una g^d, per $d = 9, 8, 7, 6, 5$, si considererà una rete omaloidica costituita da curve (del terz'ordine) penultime aggiunte.

---

[17]) Chiameremo r^{esima} *serie canonica*, quella secata dal sistema aggiunto d'indice r. In particolare, quindi, si dirà *ultima* serie canonica, quella secata dalle curve aggiunte d'indice più alto; *penultima*, etc. Le serie canoniche dei diversi indici, sono invarianti per trasformazioni cremoniane.

Per $d = 4, 3, 2, 1$ converrà osservare (I, § 7) che se esiste una trasformazione cremoniana T che muti C_1 in C'_1, questa dovrà avere tutti i suoi punti fondamentali i-pli per C_1 (per C'_1). Onde le trasformazioni cremoniane che *possono* mutare C_1 in C'_1, sono in numero finito [18]).

Catania, marzo 1907.

GIUSEPPE MARLETTA.

---

[18]) È noto infatti che il numero dei punti base di una rete omaloidica, supera 8 per reti d'ordine maggiore di 17. {Vedi MONTESANO, *Su le reti omaloidiche di curve* [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, serie III, vol. XI (1905), pp. 259-303]}.

Rimane ancora da studiare la quistione nell'ipotesi che le due curve d'ordine minimo, siano due curve d'ordine $3i$ con 9 (e 10 per $i = 2$) punti i-pli.

Colgo l'occasione per enunciare il seguente teorema, facile a dimostrarsi, non privo d'interesse.

Ogni corrispondenza biunivoca fra i punti di due curve degli spazi $[r]$ *e* $[r]'$, *d'ordine* $n \geq 2r$, *e di genere massimo, è subordinata ad una collineazione fra questi spazi.*

Per $n = 2r$ questo teorema era noto. {Vedi SEGRE, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* [Mathematische Annalen, t. XXX (1887), pp. 203-226]}.