SULL' EQUILIBRIO DEI SOLIDI ELASTICI DISGREGATI.

Nota di E. ALMANSI [1]).

1. — Sia (S) un solido elastico isotropo, che occupi lo spazio S limitato dalla superficie Σ. Il solido (S) sia in equilibrio sotto l'azione di forze di massa, e di forze applicate agli elementi della sua superficie. Denotiamo con (D) lo stato di deformazione in cui esso si trova.

Immaginiamo ora lo stesso solido diviso in un grandissimo numero di particelle p estremamente piccole; e ammettiamo che il solido (S), così *disgregato*, si conservi in equilibrio nello stato di deformazione (D) purchè sia soddisfatta questa condizione: *che per ogni elemento della superfice di contatto fra due particelle p, l'angolo θ formato dalla pressione che si esercita sopra una delle due faccie dell elemento colla normale uscente dalla faccia opposta, non superi un certo valore Θ compreso fra* 0 *e* $\frac{\pi}{2}$ (angolo d'attrito).

Noi ci possiamo proporre di fare uno studio di quelle speciali deformazioni (D) che rappresentano degli stati di equilibrio *anche per il solido disgregato.* A tal fine converrà considerare le particelle p come infinitesime, ritenere, cioè, che la condizione

$$\theta \lesseqgtr \Theta$$

debba esser verificata per *qualunque* elemento di supefice situato nello spazio S.

L'esame di quegli stati d' equilibrio di un solido elastico per cui questa condizione è soddisfatta, conduce ad alcuni resultati non privi d' interesse.

1) Io riprendo qui, semplificandone la trattazione, un argomento di cui mi ero già occupato in altra mia Nota (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XL); ed applico ad alcuni casi particolari i resultati ivi ottenuti, che qui ritrovo.

2. — La forza di massa applicata all' elemento di (S) che occupa lo spazio $d\mathrm{S}$ abbia per componenti $\mathrm{X}\,d\mathrm{S}$, $\mathrm{Y}\,d\mathrm{S}$, $\mathrm{Z}\,d\mathrm{S}$. Denotiamo poi con

$$p_{11}\,,\ p_{22}\,,\ p_{33}\,,$$
$$p_{23}=p_{32}\,,\ p_{31}=p_{13}\,,\ p_{12}=p_{21}$$

le sei *pressioni interne* fondamentali, intendendo, per es., che p_{11}, p_{12}, p_{13} rappresentino le componenti, secondo i tre assi coordinati, della pressione agente sulla faccia di un elemento normale all'asse delle x che guarda nel verso *negativo* dell' asse.

Queste sei funzioni devono verificare le tre condizioni di equilibrio

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x}+\frac{\partial p_{12}}{\partial y}+\frac{\partial p_{13}}{\partial z}=\mathrm{X}\,,\ \text{ecc.} \tag{1}$$

ed altre sei equazioni a cui, nell' ipotesi che X, Y, Z siano costanti, possiamo dare la forma:

$$\Delta^2 p_{11}=-2k\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial x^2}\,,\quad \Delta^2 p_{12}=-2k\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial x\,\partial y}\,,\ \text{ecc.} \tag{2}$$

essendo $\mathrm{Q}=p_{11}+p_{22}+p_{33}$, e k una costante positiva. La funzione Q soddisfa all'equazione

$$\Delta^2\mathrm{Q}=0.$$

3. — Dalla cond. $\theta \lesseqgtr \Theta$, e dalle eq. (1), possiamo dedurre varie conseguenze. Incominciamo dal dimostrare il Teorema:

Se un elemento di superficie $d\sigma$, passante per un punto a del solido disgregato non è soggetto a pressione, nessun elemento passante per a è soggetto a pressione.

Le componenti p_1, p_2, p_3 della pressione che agisce sopra una delle due faccie di un elemento di superficie sono espresse dalle formule

$$p_1=p_{11}\cos\alpha+p_{12}\cos\beta+p_{13}\cos\gamma\,,\ \text{ecc.} \tag{3}$$

ove $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ denotano i coseni direttori della normale uscente dalla faccia opposta.

Prendiamo il punto a come origine delle coordinate, una delle due normali a $d\sigma$ come asse delle z, gli assi delle x e delle y ad arbitrio. La pressione che agisce su $d\sigma$ essendo nulla, avremo in a

$$p_{31} = p_{32} = p_{33} = 0.$$

Consideriamo un elemento $d\sigma'$ passante per a e per l'asse delle y ($\cos\beta = 0$). Le componenti della pressione P che agisce su $d\sigma'$, per le formule (3), saranno:

$$p_1 = p_{11}\cos\alpha\,,\ p_2 = p_{21}\cos\alpha\,,\ p_3 = 0\,;$$

quindi:

$$\mathrm{P} = \left| \sqrt{p_{11}{}^2 + p_{21}{}^2}\cos\alpha \right|$$

La componente normale di P è data in generale dalla formula:

$$\mathrm{N} = p_1\cos\alpha + p_2\cos\beta + p_3\cos\gamma.$$

Nel nostro caso sarà:

$$\mathrm{N} = p_1\cos\alpha = p_{11}\cos^2\alpha\,.$$

Se $p_{11}{}^2 + p_{12}{}^2$ fosse diverso da zero, il rapporto

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} = \pm\frac{p_{11}}{\sqrt{p_{11}{}^2 + p_{12}{}^2}}\cos\alpha$$

rappresenterebbe il coseno dell' angolo θ formato da P colla normale a $d\sigma'$. Col tendere di α a $\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ tenderebbe a zero, dunque θ, per valori di α abbastanza vicini a $\frac{\pi}{2}$, sarebbe certamente maggiore dell' angolo acuto Θ, onde la condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$ non resulterebbe verificata.

Dovrà quindi essere $p_{11}{}^2 + p_{12}{}^2 = 0$, e perciò $\mathrm{P} = 0$. Ma $d\sigma'$ può rappresentare un elemento qualunque passante per a, l'asse delle y essendo arbitrario nel piano di $d\sigma$: il teorema è dunque dimostrato.

Da esso si deduce che se una parte Σ_0 della superficie Σ che limita il sistema disgregato non è a contatto con altri corpi, se cioè nessuna pressione agisce sopra i suoi elementi, la pressione sarà pure nulla per qualunque elemento di superfice passante per un punto di Σ_0. In altre parole, nei punti di Σ_0 tutte e sei le pressioni p_{11}, p_{12}, ecc. devono esser nulle.

4. — Sia a un punto della superfice libera Σ_0 (che supporremo ammetta ovunque un piano tangente determinato). Prendiamo il punto a come origine delle coordinate, la normale interna come asse delle z.

Poichè nei punti di Σ_0 le pressioni $p_{11}, p_{12}, \ldots$ sono tutte nulle (§ 3), e nel punto a la superficie è tangente al piano xy, in quel punto dovranno esser nulle anche le derivate delle pressioni rispetto ad x e ad y. Quindi le formule (1) daranno:

$$\frac{\partial p_{31}}{\partial z} = \mathrm{X}\,, \quad \frac{\partial p_{32}}{\partial z} = \mathrm{Y}\,, \quad \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = \mathrm{Z}\,.$$

Sull asse delle z prendiamo un punto a' inf.^{te} vicino ad a. Nel punto a sarà a meno d'infinitesimi d'ordine superiore:

$$p_{31} = (p_{31})_a + \left(\frac{\partial p_{31}}{\partial z}\right)_a dz\,, \text{ ecc.,}$$

ovvero, essendo $(p_{31})_a = 0$, $\left(\frac{\partial p_{31}}{\partial z}\right)_a = \mathrm{X}$, ecc.

$$p_{31} = \mathrm{X}\,dz\,, \quad p_{32} = \mathrm{Y}\,dz\,, \quad p_{33} = \mathrm{Z}\,dz\,.$$

Ma p_{31}, p_{32}, p_{33} sono le componenti della pressione che agisce sull' elemento passante per a', normale all'asse delle z (e precisamente sulla faccia che guarda nel verso negativo dell'asse). Dunque:

La pressione che agisce sopra un elemento di superfice. parallelo ed inf.^{te} vicino alla superfice libera, ha la direzione della forza di massa.

E poichè la pressione non può formare colla normale all'elemento un angolo maggiore di Θ:

In un punto qualunque della superfice libera la normale interna non può formare colla forza di massa agente in quel punto un angolo maggiore di Θ.

È ben nota questa proprietà dei sistemi disgregati in equilibrio.

5. — La condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$ richiede che in ogni punto di S le tre pressioni normali p_{11}, p_{22}, p_{33} siano positive o nulle. Positiva o nulla dovrà esser pure la loro somma Q.

Se la forza di massa è costante, la Q è una funzione armonica (§ 2).

Queste proprietà della funzione Q ci permettono di dare una maggiore estensione al teorema del § 3.

Supponiamo che sopra un elemento $d\sigma$, passante per un punto a situato *nell'interno* dello spazio S non agisca nessuna pressione. Nel punto a sarà, in virtù di quel Teorema, $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$, quindi $Q = 0$. Consideriamo una sfera s col centro in a e tutta situata entro S. Per il *teorema della media* avremo $\int_s Q\,d\,s = 0$. Dovendo essere ovunque $Q \gtreqless 0$, sarà $Q = 0$ in tutti i punti di s, e per una nota proprietà delle funzioni regolari armoniche, in tutto lo spazio S.

Ma non può essere $Q = 0$ se non essendo $p_{11} = p_{22} = p_{33}$, e l'annullarsi delle pressioni normali p_{11}, p_{22}, p_{33} porta come conseguenza che sia pure $p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0$, altrimenti sugli elementi di superfice normali agli assi agirebbero delle tensioni tangenziali, sarebbe cioè $\theta = \frac{\pi}{2} > \Theta$.

Potremo enunciare pertanto il seguente teorema :

Se un elemento di superfice passante per un punto a, situato nell' interno dello spazio S *non è soggetto a pressione, nessun elemento del sistema è soggetto a pressione.*

La dimostrazione non vale quando il punto a si trova sulla superfice che limita lo spazio S, poichè allora non è possibile costruire la sfera s tutte contenuta entro S.

6. — Noi vogliamo ora esaminare più a fondo il caso che una parte σ_0 della superfice libera Σ_0 appartenga ad un piano Π.

Ricordiamo un teorema relativo alle funzioni armoniche.

Se una funzione ϕ, *regolare ed armonica nello spazio* S, *si annulla, colla sua derivata rispetto alla normale interna, in tutti i punti di una regione* σ_0 *della superfice che limita* S, *essa è nulla in tutto lo spazio* S [1]).

Da questo teorema segue immediatamente che se una funzione ϕ, armonica e regolare in S, assume nei punti di σ_0 un valore costante, e la sua derivata normale è nulla, o, ciò che è lo stesso, se nei punti di σ_0 si ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial z}=0 ,$$

sarà $\phi=$ cost. in tutto lo spazio S.

Se poi nei punti di σ_0 si ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\mathrm{X} , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=\mathrm{Y} , \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}=\mathrm{Z} ,$$

ove X, Y, Z denotano delle costanti, sarà in tutto lo spazio S

$$\phi=\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z+\mathrm{U} \quad (\mathrm{U}=\text{cost.})$$

come apparisce dal considerare la funzione armonica $\phi-(\mathrm{X}\,x+\mathrm{Y}\,y+\mathrm{Z}\,z)$ le cui tre derivate sopra σ_0 si annullano.

Ciò premesso, veniamo al nostro sistema, supponendo che una parte σ_0 della sua superfice sia libera ed appartenga ad un piano Π.

Posta l' origine delle coordinate in un punto di σ_0, prendiamo come asse delle z la normale rivolta verso l'interno di S. Nei punti di σ_0 si annulleranno le sei pressioni, e le loro derivate rispetto ad x e ad y: onde avremo:

1) V., per es., la mia Nota: " Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi „. R. Acc. dei Lincei, 1907.

$$
(4) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& p_{31} = p_{32} = p_{33} = 0\,, \\
& \frac{\partial p_{31}}{\partial z} = \mathrm{X}\,, \quad \frac{\partial p_{32}}{\partial z} = \mathrm{Y}\,, \quad \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = \mathrm{Z}\,. \\
& \mathrm{Q} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Poniamo:

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& p_{31} = \left(\mathrm{X} - k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right) z + \phi_1\,, \\
& p_{32} = \left(\mathrm{Y} - k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) z + \phi_2\,, \\
& p_{33} = \left(\mathrm{Z} - k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\right) z + k\mathrm{Q} + \phi_3
\end{aligned}
\right.
$$

Da queste formule si ricava

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial p_{31}}{\partial z} = \mathrm{X} - k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - kz\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\,, \\
& \frac{\partial p_{32}}{\partial z} = \mathrm{Y} - k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} - kz\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z}\,, \\
& \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = \mathrm{Z} - kz\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z}\,.
\end{aligned}
$$

quindi, per le (4), nei punti di σ_0 ($z = 0$) sarà:

$$
\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0\,, \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = 0\,.
$$

Ma le funzioni ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sono armoniche nello spazio S. Infatti dalle formule (5), ricordando che $\Delta^2 \mathrm{Q} = 0$, si ha:

$$
\Delta^2 p_{31} = -2k\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial x\, \partial z} + \Delta^2 \phi_1\,, \text{ etc.}\,,
$$

e, per le (2), $\Delta^2 \phi_1 = 0$, $\Delta^2 \phi_2 = 0$, $\Delta^2 \phi_3 = 0$. Ne viene di conseguenza che queste tre funzioni dovranno esser nulle in tutto lo spazio S. Onde le formule (5) diventeranno

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{aligned}
p_{31} &= \left(X - k\frac{\partial Q}{\partial x}\right) z\,,\\
p_{32} &= \left(Y - k\frac{\partial Q}{\partial y}\right) z\,,\\
p_{33} &= \left(Z - k\frac{\partial Q}{\partial z}\right) z + k\,Q
\end{aligned}
\right.
$$

Come si vede, le tre pressioni interne $p_{31}\,, p_{32}\,, p_{33}$ sono esprimibili mediante la sola funzione Q.

7. — Valendoci delle formule precedenti possiamo ora dimostrare che non solo σ_0, ma *tutta la superficie libera* Σ_0 *deve appartenere al piano* Π.

Supponiamo infatti che una parte σ'_0 di Σ_0 non appartenga al piano Π; ivi sarebbe $z \gtrless 0$, e inoltre, come su tutta la superfice libera, $p_{31} = p_{32} = p_{33} = Q = 0$, quindi per le formule (6)

$$
k\frac{\partial Q}{\partial x} = X\,,\quad k\frac{\partial Q}{\partial y} = Y\,,\quad k\frac{\partial Q}{\partial z} = Z\,.
$$

Dovrebbe allora aversi in tutto lo spazio S (v. § 6):

$$
k\,Q = X\,x + Y\,y + Z\,z + U \quad (U = \text{cost.}),
$$

e perciò su tutta la superfice libera, ove $Q = 0$,

$$
X\,x + Y\,y + Z\,z + U = 0.
$$

Ma questa è l equazione di un piano unico; e ciò è in contraddizione coll' ipotesi che alla sup. Σ_0 appartenga, oltre alla sup. σ_0 situata nel piano Π, una sup. σ'_0 fuori di questo piano.

Tutta la superfice Σ_0 deve dunque appartenere al piano Π.

8. — Supponiamo che lo spazio S occupato dal sistema sia un cilindro limitato da due sezioni Σ_0 e Σ_1 normali all'asse.

Posta l' origine delle coordinate in un punto O di Σ_0, prendiamo l'asse delle z parallela all'asse del cilindro: il suo verso positivo sia da Σ_0 a Σ_1.

In tutto il cilindro si abbia:

$$X = 0\,,\quad Y = 0\,,\quad Z = \text{cost.} > 0\,.$$

La base Σ_0 sia libera. Su ciascun elemento dell'altra base Σ_1, e della superfice laterale Σ' agisca una pressione *normale*.

Ci proponiamo di determinare tutti i possibili stati d'equilibrio del cilindro pei quali è verificata la solita condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$.

Varranno intanto le formule (6), ove si faccia $X = Y = 0$:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_{31} = -kz\frac{\partial Q}{\partial x}\,,\quad p_{32} = -kz\frac{\partial Q}{\partial y}\,,\\ &p_{33} = Zz - k\left(z\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\right).\end{aligned}\right.$$

Nei punti della base Σ_1, affinchè la pressione che agisce sopra i suoi elementi resulti normale, dovrà essere $p_{31} = p_{32} = 0$, vale a dire $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dQ}{\partial y} = 0$, ossia $Q = \text{cost.}$

La pressione che agisce sugli elementi della superfice laterale ha per componenti

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= p_{11}\cos\alpha + p_{12}\cos\beta\,,\\ p_2 &= p_{21}\cos\alpha + p_{22}\cos\beta\,,\\ p_3 &= p_{31}\cos\alpha + p_{32}\cos\beta\,,\end{aligned}\right.$$

ove $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ denotano i coseni della normale interna.

Affinchè la pressione resulti normale dovrà essere

$$p_3 = 0\,,\quad p_2\cos\alpha - p_1\cos\beta = 0\,.$$

Esamino la condizione $p_3 = 0$, ossia

$$p_{31}\cos\alpha + p_{32}\cos\beta = 0\,.$$

Per le formule (7) essa diventa

$$-kz\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta\right) = 0\,,$$

vale a dire

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = 0 \qquad (n = \text{norm. int.})$$

La funzione Q, armonica nello spazio S occupato dal cilindro, soddisfa dunque in superfice alle seguenti condizioni:

Sulla superfice laterale, la sua derivata rispetto alla normale interna è nulla.

Sulla base Σ_1 la Q acquista un valore costante, che denoteremo con Cz_1, z_1 rappresentando il valore di z nei punti di questa base.

Infine sulla base superiore Σ_0, che è libera, la Q deve annullarsi.

Tali condizioni resultano soddisfatte se poniamo

$$Q = Cz,$$

nè può esistere, come è noto, un'altra funzione Q che soddisfi alle stesse condizioni.

Le formule (7) diventeranno allora:

$$p_{31} = 0, \quad p_{32} = 0, \quad p_{33} = Z z . \tag{9}$$

Queste tre pressioni sono così determinate in tutto lo spazio S.

9. — Le eq. (1), tenendo conto delle (9), si riducono a:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} = 0 . \tag{10}$$

La terza resulta già verificata.

Poichè Q, ossia $p_{11} + p_{22} + p_{33}$, e p_{33}, sono espresse dal prodotto di z per una costante, lo stesso avverrà di $p_{11} + p_{22}$. Poniamo $p_{11} + p_{22} = 2\,A\,z$, ossia:

$$p_{22} = 2\,A\,z - p_{11} . \qquad (A = \text{cost.}) . \tag{11}$$

Le eq. (10), sostituendo nella seconda a p_{22} questa sua espressione, possiamo scriverle:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_{11}}{\partial y} - \frac{\partial p_{12}}{\partial x} = 0 . \tag{12}$$

Da esse si ricava:

$$\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial y^2}=0\,, \quad \frac{\partial^2 p_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_{12}}{\partial y^2}=0$$

Ora le (2), essendo $Q = Cz$, danno: $\Delta^2 p_{11} = 0$, $\Delta^2 p_{12} = 0$: quindi, per le formule precedenti, avremo: $\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 p_{12}}{\partial z^2} = 0$. Le funzioni p_{11}, p_{12} sono dunque lineari rispetto alla variabile z. Ma esse devono annullarsi sulla superfice libera, ossia per $z=0$: onde potremo porre:

$$p_{11} = z\,\varphi_1(x\,,\,y)\,, \quad p_{12} = z\,\varphi_2(x\,,\,y)\;. \tag{13}$$

Le eq. (12) daranno allora:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0\,, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0\,,$$

perciò avremo:

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\,, \quad \varphi_2=\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\,,$$

ove φ' denota una funzione armonica delle variabili x, y; od anche

$$\varphi_1 = A+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,, \quad \varphi_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,$$

ove $\varphi=\varphi' - Ax$ è un'altra funzione armonica delle stesse variabili.

Per le formule (11) e (13) sarà:

$$p_{11} = z\left(A+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \quad p_{22} = z\left(A-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \quad p_{12} = z\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,. \tag{14}$$

10. — Riprendiamo la condizione

$$p_2 \cos\alpha - p_1 \cos\beta = 0 \tag{15}$$

che deve esser verificata sulla superfice laterale del cilindro.

Dalle formule (8) e (14) abbiamo

$$p_1 = z\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \mathrm{A}\cos\alpha\right\},$$

$$p_2 = z\left\{\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\beta + \mathrm{A}\cos\beta\right\}.$$

Quindi la cond. (15) diventerà

$$(16)\qquad (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\frac{\partial\phi}{\partial y} - 2\cos\alpha\cos\beta\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0\ .$$

E basterà (poichè ϕ non contiene z) che essa sia verificata sul contorno di una sezione trasversale del cilindro, per es. la base Σ_0.

Ora sussiste — salvo qualche restrizione sulla natura di Σ_0 — il seguente teorema, che qui mi limito a dimostrare per il cerchio :

Una funzione ϕ, armonica e regolare in un'area piana Σ_0, che sul contorno verifica la formula (16), *è costante in tutta l'area.*

Applicando il principio della rappresentazione conforme, si estende facilmente il teorema ad una vastissima classe di aree.

Nel caso di un area circolare, posta l' origine delle coordinate nel centro, l' equazione (16) assume la forma :

$$(17)\qquad (x^2 - y^2)\frac{\partial\phi}{\partial y} - 2xy\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0\ .$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta, al pari di ϕ, una funzione armonica, la quale, essendo nulla sul contorno, dovrà esser nulla in tutta l'area Σ_0 Poniamo ora

$$(18)\qquad (x^2 - y^2)\frac{\partial\phi}{\partial x} + 2xy\frac{\partial\phi}{\partial y} = \psi$$

Derivando l' eq. (18) rispetto ad x, la (17) rispetto ad y, e sommando, otteniamo $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. Derivando invece la (18) rispetto ad y, la (17) rispetto ad x, e sottraendo, si ottiene $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$. La ψ

è dunque una costante che dovrà essere uguale a zero, affinchè l'eq. (18) sia verificata per $x = y = 0$.

Dalla eq. (17) e dalla (18) in cui si faccia $\psi = 0$, si ricava $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, ossia $\phi =$ cost., c. v. d.

Sostituendo nelle formule (14) avremo:

$$p_{11} = \mathrm{A}\, z\,, \quad p_{22} = \mathrm{A}\, z\,, \quad p_{12} = 0\,.$$

Nelle sei pressioni interne rimane dunque indeterminata la sola costante A.

11. — Fin qui, della condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$ abbiamo tenuto conto solo in quanto essa richiede che nei punti di Σ_0 le sei pressioni p_{11}, p_{12}, etc. siano nulle. Noi dobbiamo però tener conto di quella condizione per tutti gli elementi di superfice situati nello spazio S.

Perciò osserviamo che alla condizione stessa può darsi una forma diversa.

In un punto qualunque a di un sistema continuo in equilibrio siano P', P'', P''' le tre *pressioni principali*. Considero un elemento qualunque $d\sigma$ passante per a.

Se per tutti gli elementi $d\sigma$ dovesse essere $\theta = 0$ (caso dei fluidi), si troverebbe che le tre quantità P', P'', P''' dovrebbero essere uguali.

Quando θ è assoggettato alla condizione di non superare Θ, si trova che il rapporto fra due delle quantità P', P'', P''' deve esser compreso fra K ed $\frac{1}{\mathrm{K}}$, essendo

$$\mathrm{K} = \frac{1 - \operatorname{sen}\Theta}{1 + \operatorname{sen}\Theta}$$

Tralascio, per brevità, la dimostrazione, a cui si può pervenire, in varii modi, partendo dalle formule

$$p_1 = \mathrm{P}' \cos\alpha\,, \quad p_2 = \mathrm{P}'' \cos\beta\,, \quad p_3 = \mathrm{P}''' \cos\gamma\,,$$

che danno le componenti, nelle direzioni di P', P'', P''', della pressione che agisce sopra un elemento $d\sigma$, e precisamente sulla faccia opposta a quella da cui esce la normale che ha per coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ [1]).

Nel problema che abbiamo esaminato le tre pressioni principali sono, in un punto qualunque del solido, le stesse p_{11}, p_{22}, p_{33}, ossia Az, Az e Zz. Dunque la costante A dovrà esser compresa fra KZ e $\frac{K}{Z}$.

12. — Varii altri problemi si potrebbero studiare, intorno a quegli speciali stati d'equilibrio di un solido elastico, pei quali è verificata la condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$.

Noi potremmo, per esempio, esaminare il caso che la superfice libera Σ_0 sia piana, ed abbia, rispetto alla forza di massa supposta costante, *la massima inclinazione compatibile coll'equilibrio:* il caso, cioè, che la normale a Σ_0, rivolta verso l'interno di S, formi colla forza di massa un angolo precisamente uguale a Θ (v. § 4).

Senza porre alcun'altra condizione, si trova che i soli stati d'equilibrio possibili sono quelli a cui corrispondono le pressioni interne:

$$p_{11} = \frac{2X^2 + Z^2}{Z} z, \quad p_{22} = Az, \quad p_{33} = Zz,$$

$$p_{23} = 0, \quad p_{31} = Xz, \quad p_{12} = 0,$$

ove A è una costante che deve esser compresa fra certi limiti, dei quali è facile determinare i valori.

---

1) Si può, per es., esprimere $\cos\theta$ in funzione di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, cercare il minimo valore che assume $\cos\theta$, e porre la condizione che esso non sia inferiore a $\cos\Theta$.