SOPRA UN PROBLEMA DI ELETTROSTATICA.

Nota di EMILIO ALMANSI

Professore nella R. Università di Genova.

1. Un metodo per determinare sperimentalmente il valore della densità elettrica in un punto m della superficie di un conduttore (C), carico di elettricità in equilibrio, e non soggetto ad azioni esterne, consiste nel portare a contatto con (C) nel punto m, un secondo conduttore (c), le cui dimensioni siano molto piccole rispetto a quelle di (C). L' elettricità che da primo era distribuita sulla superficie del conduttore (C), si distribuirà sulle superficie dei due conduttori (C) e (c). Sia e la massa elettrica di cui si carica il conduttore (c).

Se in prossimità di questo conduttore la superficie di (C) si discosta poco dal piano tangente nel punto di contatto, si può ritenere che il rapporto

$$K = \frac{e}{h}, \tag{1}$$

tra la massa e che è passata dal conduttore (C) al conduttore (c), e la densità elettrica h che si aveva nel punto m di (C), quando questo era isolato, dipenda solo dalla natura geometrica del conduttore (c), e dal punto della sua superficie che si è portato a contatto con (C).

Dalla formula (1), misurando la carica e del conduttore (c), e conoscendo il valore della costante K, potremo ricavare il valore di h.

Una dimostrazione del principio su cui si basa questo metodo, che cioè il valore di K non dipende da (C), può vedersi nelle « *Leçons sur l' Électricité et le Magnétisme* » del Duhem. (Livre III, Ch. I).

In questa Nota io dò una dimostrazione, che al pari di quella del Duhem, non è rigorosa, nè, data la natura del problema, potrebbe esserlo ; ma che mi sembra più convincente, e che suggerisce un metodo generale per la determinazione di K. Calcolo poi K nel caso che il conduttore (c) sia una semi-sfera, ritrovando il valore dato dal Beltrami [1]. Accenno infine al caso di un disco circolare piano.

2. Sia σ (fig. 1) una superficie chiusa, T il piano tangente in un suo punto m. Noi supporremo che σ si trovi tutta da una stessa parte di T.

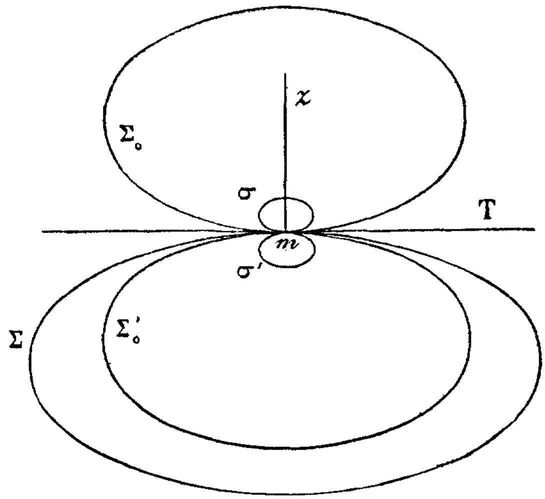

Fig. 1.

Sia σ' la superficie simmetrica di σ rispetto al piano T. Diremo s l' insieme delle due superficie σ e σ'.

Prendiamo il punto m come origine delle coordinate, la normale a T, rivolta verso σ, come asse delle z.

Immaginiamo di elettrizzare la superficie s *in modo da avere in ogni suo punto il potenziale*

$$u = z\,.$$

Per ragione di simmetria, la densità elettrica, che diremo μ, in due punti di s simmetrici rispetto a T, avrà valori uguali

1) " Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori ", Nuovo Cimento, Serie III, T. I, 1877.

e di segno contrario: sulla superficie σ si troverà una massa

$$e_1 = \int_\sigma \mu \, d\sigma \,,$$

sulla superficie σ' una massa $-e_1$.

Il massimo valore assoluto di u sarà a, a denotando la coordinata z del punto di σ più lontano da T. Allontanandosi da s, u tende verso zero. Inoltre u, per ragioni di simmetria, sarà nullo in tutto il piano T. Noi possiamo perciò immaginare due superficie chiuse Σ_0 e Σ'_0, tangenti in m al piano T, e situate una da una parte di questo piano, l'altra dall'altra, tali che in ogni loro punto, e nello spazio esterno, il rapporto $\frac{u}{a}$ sia minore, in valore assoluto, di un numero assegnato, piccolo ad arbitrio.

In particolare u sarà piccolissimo rispetto ad a in tutti i punti di una grande superficie Σ, che contenga Σ'_0 nel suo interno, e non penetri nell'interno di Σ_0.

Supponiamo che la superficie σ' sia tutta contenuta nell'interno di Σ. Noi potremo allora, per un ben noto principio, distribuire sopra Σ la massa $-e_1$ che si trova sopra σ', in modo da non alterare il potenziale nei punti di Σ, nè, per conseguenza, nello spazio esterno.

Avremo così una massa e_1 distribuita sopra σ, ed una massa $-e_1$ sopra Σ, che producono un potenziale uguale a z nei punti di σ, e un potenziale piccolissimo rispetto ad a nei punti di Σ.

Se vogliamo ottenere un potenziale

$$v = g\,z \qquad (g = \text{cost.})$$

nei punti di σ, e un potenziale piccolissimo rispetto a $g\,a$ nei punti di Σ, basterà che distribuiamo, con una distribuzione perfettamente analoga a quella delle masse e_1 e $-e_1$, una massa

$$e = g\,e_1$$

sopra σ, e una massa uguale e di segno contrario sopra Σ.

3. Premesso questo, e tornando a considerare le superficie σ e Σ come non elettrizzate, supponiamo di distribuire sulla superficie Σ una massa E, in modo da avere lo stesso potenziale in tutti i suoi punti. Sia V il potenziale di E in un punto qualunque dello spazio, P il valore costante di V sopra Σ, h la densità nel punto m.

Supponiamo poi di distribuire una massa

$$e = 4\pi h e_1 \tag{2}$$

sulla superficie σ, e una massa uguale e di segno contrario, sulla superficie Σ, in modo che, detto v il loro potenziale, sulla superficie σ sia

$$v = 4\pi h z\,,$$

e sulla superficie Σ v sia piccolissimo rispetto a $4\pi h a$, ciò che sarà possibile per le cose dette nel § precedente.

Consideriamo il potenziale

$$U = V + v\,,$$

dovuto alla massa $E - e$ distribuita sopra Σ, e alla massa e distribuita sopra σ, e cerchiamo i valori che esso prende sulle due superficie.

Nei punti di Σ, ove $V = P$, e v è piccolissimo rispetto a $4\pi h a$, sarà

$$U = P(1 + \varepsilon)\,, \tag{3}$$

ε denotando una quantità piccolissima rispetto a $\dfrac{4\pi h a}{P}$, ossia rispetto ad $\dfrac{a}{A}$, se poniamo

$$A = \frac{P}{4\pi h}\,.$$

Quanto al valore di U nei punti di σ, osserviamo da prima che nel punto m si ha

$$V = P\,,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = -4\pi h\,,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi h\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

ove R_1 ed R_2 sono i raggi principali di curvatura della superficie Σ nel punto m, che supporremo grandissimi. Perciò in un punto dell' asse delle z, molto vicino ad m, potremo ritenere

$$V = P - 4\pi h z + w, \tag{4}$$

w denotando una quantità piccolissima rispetto a $4\pi h z$.

Supponiamo la superficie σ tanto piccola da poter applicare la formula precedente ai punti dell' asse delle z che si trovano nell' interno di σ (od anche all' esterno, ma vicinissimi a σ). Per tali punti w sarà piccolissimo rispetto a $4\pi h a$.

Sia ora p un punto di σ. Immaginiamo di condurre per p la superficie $V = \text{cost.}$, che incontri l' asse delle z nel punto p'. Il valore di V nel punto p sarà dato dalla formula (4) ove s' intenda che z rappresenti la coordinata di p'.

Ma se la superficie Σ, in prossimità del punto m, si discosta pochissimo dal piano T, le superficie $V = \text{cost.}$ che tagliano σ non differiranno sensibilmente dai piani paralleli a T. Le coordinate z dei punti p e p' differiranno tra loro di una quantità piccolissima rispetto ad a. Potremo quindi ritenere che la formula (4) valga per un punto qualunque p di σ, z denotando la sua coordinata, e w una quantità piccolissima rispetto a $4\pi h a$.

Essendo sulla superficie σ $v = 4\pi h z$, sarà

$$U = (P - 4\pi h z + w) + 4\pi h z = P + w,$$

oppure

$$U = P(1 + \epsilon),$$

ove ϵ rappresenta, come nella formula (3), una quantità piccolissima rispetto a $\dfrac{4\pi h a}{P}$ ossia rispetto ad $\dfrac{a}{A}$.

La formula (3) vale dunque tanto per la superficie σ come per la superficie Σ.

Ora A, cioè $\dfrac{P}{4\pi h}$, rappresenta il raggio di una sfera che acquista il potenziale P, quando sulla sua superficie venga distribuita una massa con densità costante, ed uguale ad h. A sarebbe insomma il raggio di Σ, se Σ fosse una sfera. Supponendo la superficie Σ molto grande rispetto a σ, potremo ritenere che il rapporto $\frac{a}{\mathrm{A}}$, sia molto piccolo rispetto all'unità, e ciò quand'anche Σ si discosti alquanto dalla forma sferica.

Se conveniamo di trascurare rispetto all'unità le quantità di un ordine di grandezza inferiore ad $\frac{a}{\mathrm{A}}$, nella formula (3) potremo trascurare ε che si è veduto esser molto piccolo rispetto ad $\frac{a}{\mathrm{A}}$, e ritenere per conseguenza, tanto sopra Σ, come sopra σ, $\mathrm{U} = \mathrm{P} = \text{cost.}$

Dunque U, ossia $\mathrm{V} + v$, può considerarsi come il potenziale della massa E in equilibrio sulle superficie Σ e σ, mentre V è il potenziale della stessa massa E in equilibrio sulla sola superficie Σ, e v è il potenziale della massa

$$e = 4\pi h e_1 \tag{2}$$

distribuita sopra σ, e della massa $-e$ distribuita sopra Σ.

Ciò è quanto dire che se il conduttore (C), limitato dalla superficie Σ, contiene la massa E in equilibrio, e se portiamo il conduttore (c), limitato dalla superficie σ, a contatto con (C) nel punto m, passa nel conduttore (c) una massa e data dalla formula (2), h essendo la densità che si aveva nel punto m, quando il conduttore (C) era isolato.

Posto

$$\mathrm{K} = 4\pi e_1 , \tag{5}$$

sarà

$$e = \mathrm{K} h .$$

Il valore di K, come quello di e_1 (§ 2) dipende solo dalla superficie σ e dal punto m.

Resta così dimostrato il nostro principio. Di più abbiamo nella formula (5) un'espressione del coefficiente K.

4. Un'osservazione è necessaria nel caso che la superficie del conduttore (c) coincida in parte col piano T. In tal caso

diciamo ω (fig. 2) questa porzione della superficie di (c), σ il resto, σ', al solito, la superficie simmetrica di σ rispetto al piano T, s l'insieme di σ e σ'.

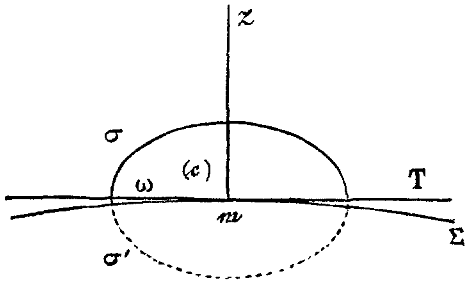

Fig. 2.

Distribuiamo sopra σ la massa e_1 e sopra σ' la massa $-e_1$, in modo da avere nei punti di σ e σ' il potenziale $u = z$. Per ragione di simmetria, la densità μ, lungo la linea l, intersezione di s col piano T, resulterà nulla.

La superficie Σ, in generale, taglierà la superficie σ', in modo che una porzione di σ', e quindi della massa $-e_1$ resterà fuori di Σ. Ma la densità μ essendo nulla lungo la linea l, e la superficie Σ, in prossimità del punto m, dovendo discostarsi pochissimo dal piano T, potremo trascurare quella porzione di $-e_1$ che resta fuori di Σ, e per conseguenza, come nel caso precedente, distribuire questa massa sopra Σ, in maniera da non modificare sensibilmente il potenziale nei punti di Σ, nè all'esterno.

Avremo così una massa e_1, distribuita sulla superficie di (c), e precisamente sulla porzione σ, e una massa $-e_1$ distribuita sopra Σ, le quali producono un potenziale uguale a z su tutta la superficie di (c), e un potenziale piccolissimo, rispetto ad a, sopra Σ.

Procedendo nel ragionamento come nel § 3, vediamo che la formula (2) ci dà ancora la quantità di elettricità che passa dal conduttore (C) al conduttore (c), quando vengono posti a contatto nel punto m.

5. Applichiamo le cose dette al caso che il conduttore (c) sia limitato dalla semi-sfera σ, di centro m, di raggio R, e dal cerchio ω (fig. 3).

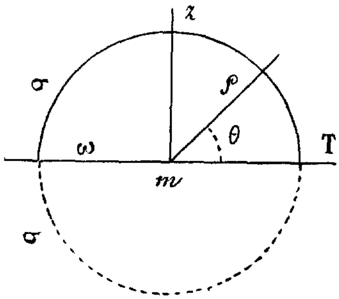

Fig. 3.

Completiamo la sfera colla superficie σ'.

Il potenziale u, dovuto alle masse e_1 e $-e_1$ distribuite sopra σ e σ' (v. § 4), si ottiene immediatamente. Basta prendere entro la sfera:

$$u = z = \rho \operatorname{sen} \theta ,$$

e fuori della sfera:

$$u = \frac{R^3 z}{\rho^3} = \frac{R^3 \operatorname{sen} \theta}{\rho^2} ,$$

essendo ρ la distanza di un punto qualunque dello spazio dall' origine m, e θ l' angolo che il raggio vettore ρ forma col piano T. Infatti queste due funzioni u sono armoniche, diventano uguali a z sulla sfera, e la seconda si comporta all' infinito come una funzione potenziale.

La densità μ in un punto di σ, detta n la normale interna, n' la esterna, sarà data dalla formula

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n'}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left\{ -\frac{\partial(\rho \operatorname{sen}\theta)}{\partial \rho} + \frac{\partial \dfrac{R^3 \operatorname{sen}\theta}{\rho^2}}{\partial \rho} \right\}_{\rho=R} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi}\left\{1 + 2\frac{R^3}{\rho^3}\right\}_{\rho=R} = \frac{3 \operatorname{sen}\theta}{4\pi} = \frac{3z}{4\pi R} .$$

Per calcolare la massa $e_1 = \int_\sigma \mu \, d\sigma$, prendiamo come elemento $d\sigma$ quello compreso tra due piani infinitamente vicini, paralleli a T. Sarà allora: $d\sigma = 2\pi \mathrm{R} \cos\theta . \mathrm{R}\, d\theta = 2\pi\mathrm{R}\, d(\mathrm{R} \operatorname{sen}\theta) = 2\pi\mathrm{R}\, dz$. Quindi:

$$e_1 = \int_0^{\mathrm{R}} \frac{3z}{4\pi\mathrm{R}} \, . \, 2\pi\mathrm{R}\, dz = \frac{3}{2}\int_0^{\mathrm{R}} z\, dz = \frac{3\mathrm{R}^2}{4} \, .$$

Sostituendo nella formula (2) avremo

$$e = 3\pi\mathrm{R}^2 h = 3h\omega \, ;$$

vale a dire: *quando si porta il conduttore* (c) *a contatto col conduttore* (C), *passa da questo a quello una quantità di elettricità uguale al triplo dell' elettricità che si aveva sulla porzione della superficie* Σ *che vien coperta dal conduttore* (c).

A questo stesso resultato perviene il Beltrami, con un procedimento assai più laborioso.

Quanto al valore di K sarà:

$$\mathrm{K} = 3\pi\mathrm{R}^2 .$$

6. Ritorniamo al caso generale, supponendo ancora che una porzione ω della superficie di (c) coincida col piano T.

Daremo un' espressione di K che si presta bene al calcolo di questo coefficiente.

Consideriamo perciò lo spazio compreso tra il piano T, e una grande semi-sfera S_0, di centro m, situata dalla parte delle z positive (fig. 4).

Il potenziale u è dovuto alle due masse e_1 e $-e_1$, la prima delle quali, essendo distribuita sulla superficie σ, si trova nello spazio considerato. Sarà quindi, in virtù di un noto teorema:

$$4\pi e_1 = -\int_{\mathrm{S}_0} \frac{\partial u}{\partial \rho} d\mathrm{S}_0 + \int_{\mathrm{T}'} \frac{\partial u}{\partial z} d\mathrm{T}' \, ,$$

ρ denotando la distanza di un punto qualunque dello spazio da m, e T' la porzione finita del piano T limitata da S_0.

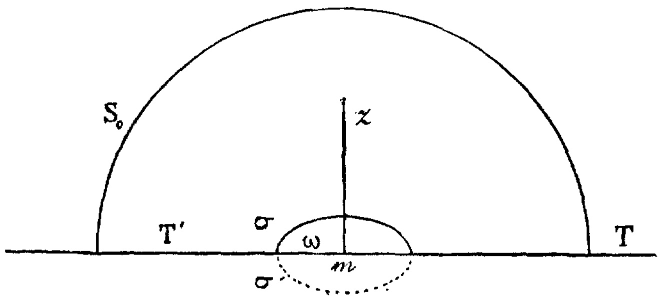

Fig. 4.

Facendo tendere verso l' infinito il raggio della semi-sfera S_0, il primo integrale tende a zero, giacchè il potenziale u, *che è dovuto ad una massa uguale a zero*, diventa infinitesimo come $\frac{1}{\rho^2}$, e la sua derivata rispetto a ρ, come $\frac{1}{\rho^3}$. Sarà dunque:

$$4\pi e_1 = \int_T \frac{\partial u}{\partial z}\, d\mathrm{T}\,,$$

od anche

$$4\pi e_1 = \int_\omega \frac{\partial u}{\partial z}\, d\omega + \int_S \frac{\partial u}{\partial z}\, d\mathrm{S}\,,$$

S denotando l' intero piano T, esclusa la porzione ω.

Ora sulla superficie chiusa s, e per conseguenza anche nell' interno, si ha $u = z$, quindi $\frac{\partial u}{\partial z} = 1\,,\ \int_\omega \frac{\partial u}{\partial z}\, d\omega = \omega$.

Ricordando poi che $4\pi e_1$ è uguale a K, avremo la formola:

$$\mathrm{K} = \omega + \int_S \frac{\partial u}{dz}\, d\mathrm{S}\,, \tag{6}$$

che ci dà l' espressione di K cercata.

Da questa formula si può trarre una conseguenza notevole.

La funzione potenziale u che è uguale a z nei punti di σ $(z > 0)$, e a *zero* nei punti di S, sarà positiva in tutto lo spazio esterno a σ e ad S. Quindi in tutti i punti di S sarà $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$, onde

$$K > \omega .$$

Per la formula (1) avremo in valore assoluto

$$e > h\,\omega ,$$

ossia: *la quantità di elettricità che passa dal conduttore* (C) *al conduttore* (c) *è sempre maggiore di quella che si aveva sulla porzione di* Σ *la quale vien coperta dalla base* ω *del conduttore* (c).

7. Riguardo alla forma che si dà nella pratica al conduttore (c) *(piano di prova)* è importante il caso di un conduttore (c) a base circolare e a spessore molto piccolo.

Per trattare questo caso si può procedere nel modo seguente.

Sul piano T consideriamo un cerchio τ, di centro m, di raggio R_1. Diciamo r la distanza di un punto qualunque dello spazio da un punto di τ.

La funzione

$$\varphi = \int_{\tau} \frac{d\tau}{r^3}$$

è ovunque positiva, si annulla all' infinito, e diventa infinita se si tende verso un punto qualunque di τ, e in una direzione qualunque. Per conseguenza, se φ_0 è una costante positiva, esisterà una superficie chiusa s su cui si avrà

$$\varphi = \varphi_0 ;$$

s sarà una superficie di rivoluzione, avente per asse l' asse delle z, simmetrica rispetto al piano T, sul quale taglierà un cerchio ω, di raggio R, maggiore di R_1.

Chiamando σ e σ' le due porzioni di s che si trovano dalle due parti di T, consideriamo il conduttore (c) limitato da σ e da ω.

Cerchiamo di calcolare il coefficiente K relativo a questo conduttore.

Il potenziale u che sopra s diventa uguale a z, si ottiene prendendo entro s $u = z$, e fuori di s

$$u = -\frac{1}{\phi_0}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \frac{dr}{r} = \frac{1}{\phi_0}\int_r \frac{d\tau}{r^2}\cdot\frac{z}{r} = \frac{z}{\phi_0}\int_\tau \frac{dr}{r^3} = \frac{z\phi}{\phi_0}\,.$$

Questa funzione è armonica, tale essendo la funzione $\int_\tau \frac{d\tau}{r}$ si comporta all' infinito come una funzione potenziale, e sulla superficie s, ove $\phi = \phi_0$, diventa uguale a z.

Per calcolare K riprendiamo la formula (6) osservando che nei punti di S si ha

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z\phi}{\phi_0}\right)\right\}_{z=0} = \frac{\phi}{\phi_0}\,.$$

Avremo dunque:

$$\mathrm{K} = \omega + \int_{\mathrm{S}} \frac{\phi}{\phi_0}\, d\mathrm{S}\,, \tag{7}$$

Da questa formula, conoscendo i raggi dei due cerchi concentrici τ ed ω, e quindi la superficie s, si può ricavare il valore di K con un' approssimazione tanto grande quanto si vuole.

Facendo tendere R_1 verso R, la costante ϕ_0 (valore della funzione ϕ sulla circonferenza del cerchio ω) tende verso l'infinito, quindi la superficie s si avvicina con ogni suo punto al cerchio ω. Il conduttore (c), di cui ω è la base, acquista uno spessore sempre più piccolo; il rapporto $\frac{\phi}{\phi_0}$, che è uguale ad 1 sulla circonferenza del cerchio ω, tende verso zero in ogni altro punto del piano S; l' integrale $\int_{\mathrm{S}} \frac{\phi}{\phi_0}\, d\mathrm{S}$ tende esso stesso verso zero; K tende verso ω.

Chiamando c lo spessore del conduttore (c) misurato sull'asse delle z, possiamo porre

$$K = \omega\left(1 + \alpha \frac{c}{R}\right),$$

ove α è un coefficiente numerico da determinarsi. Dalla formula (7), con opportune trasformazioni, e tenendo conto dell'equazione $\varphi = \varphi_0$ della superficie s, si può dedurre il valore che assume α per piccoli valori del rapporto $\frac{c}{R}$.

Tralascio questa ricerca, riserbandomi di trattare in un'altra Nota il caso più interessante di un conduttore (c) avente la forma di un mezzo ellissoide.

Qui osserverò che la formula (7) vale per una classe di conduttori ben più vasta di quella considerata. Infatti l'area τ, che si è supposta circolare, può avere una forma qualunque. Inoltre alla funzione φ si può dare la forma più generale

$$\varphi = \int_\tau \frac{\lambda \, d\tau}{r^3},$$

λ essendo una funzione che converrà supporre positiva in tutti i punti di τ, ma del resto affatto arbitraria.

Si possono così ottenere corpi di forme svariatissime, pei quali il coefficiente K è sempre espresso dalla formula (7).

A questa classe di corpi appartiene, come un caso limite, il conduttore a forma di mezza sfera, di cui ci siamo occupati al § 5. Prendiamo infatti $\lambda = \frac{1}{\tau}$, e supponiamo di rendere infinitesima l'area τ, facendo tendere ogni punto del suo contorno verso il punto m. Avremo al limite:

$$\varphi = \frac{1}{\rho^3},$$

ρ denotando al solito la distanza di un punto qualunque dello spazio da m. Se facciamo $\varphi_0 = \frac{1}{R^3}$, la superficie s $(\varphi = \varphi_0)$ sarà la sfera di centro m e di raggio R; il conduttore (c) occuperà lo spazio limitato dal piano T e da una metà della sfera s.

Ponendo nella formula (7) $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{R^3}{\rho^3}$, $ds = 2\pi\rho\, d\rho$, $\omega = \pi R^2$, avremo:

$$K = \pi R^2 + \int_R^\infty \frac{R^3}{\rho^3} 2\pi\rho\, d\rho = \pi R^2 \left(1 + 2R \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}\right) = 3\pi R^2.$$

Ritroviamo così lo stesso valore di K ottenuto per altra via.

SUL COMPORTAMENTO ELETTRICO DELLE FIAMME IN UN CAMPO ELETTROSTATICO ALTERNATO,

per G. C. DE ROSSI *ed* A. SELLA.

§ 1. Introduzione.

Mentre si hanno numerose ricerche sopra la conduttività dei gas ionizzati, quando essi vengono sottoposti a forze elettromotrici costanti, è poco conosciuto fino ad ora il loro comportamento sotto forze elettromotrici alternate.

Mac Clelland in un notevole lavoro sulla conduttività dei gas caldi, provenienti da fiamme *(Phil. Mag.* **46**, 29, 1898) istituì la seguente esperienza per dimostrare la diversa velocità degli ioni positivi e negativi. Egli raccoglieva questi gas in un tubo metallico, comunicante col suolo e disposto verticalmente sopra la fiamma; i gas salendo nel tubo lambivano prima un cilindro metallico, coassiale col tubo stesso, isolato da questo e comunicante con una sorgente a potenziale alternato e passavano poi per un tratto di tubo isolato, contenente lana di vetro, in comunicazione con un elettrometro. In tal modo i gas, per tutta la lunghezza del cilindro, attraversavano un campo elettrostatico alternato orizzontale e con linee di forza radiali. Ora, se gli ioni negativi si muovono più velocemente che i positivi, per una medesima caduta di potenziale, e se l' intensità e la frequenza della forza elettromotrice è tale che non si esauriscano tutti gli ioni presenti, è chiaro che