Funktion f und g werden auf dem Integrationswege als eindeutig und integrierbar vorausgesetzt; und von dem Integrale $\int_{t_0}^{t} g(x, y, i)\, d(x+yi)$, welches vom Anfangspunkte t_0 des Kurvenstückes zu irgend einem beliebigen Punkte t desselben zu erstrecken ist, wird angenommen, daß die den verschiedenen Werten dieses Integrals entsprechenden Bildpunkte einem Eigebiet E der xy-Ebene angehören. Von der Funktion $f(x, y)$ wird zunächst vorausgesetzt, daß sie beim Durchlaufen des Integrationsweges von t_0 nach t' nirgends zunimmt und positiv ist; weiterhin wird an Stelle dieser Voraussetzung die allgemeinere gesetzt, daß $f(x, y)$ auf dem Integrationswege sich monoton verhält.

Von dem Werte des Integrals $\int_{t_0}^{t'} f(x, y)\; g(x, y, i)\; d(x+yi)$ wird nun gezeigt, daß sein Bildpunkt einem gewissen anderen Eigebiet der xy-Ebene angehört, und es werden wieder die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß dieser Bildpunkt auf die Begrenzung des genannten Eigebiets zu liegen kommt. Durch Spezialisierung, indem $g(x, y, i)$ als eine Funktion $g(z)$ des komplexen Arguments $x+yi=z$ vorausgesetzt wird, ergibt sich ein Satz, der als Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung (in der Form von Weierstraß und Du-Bois-Reymond) auf das komplexe Gebiet angesehen werden kann.

Im voranstehenden ist der Gedankengang und wesentliche Inhalt des Buches kurz skizziert. Der Beweisapparat ist sehr sorgfältig und eingehend ausgearbeitet und der Forderung nach größtmöglicher Präzision und Genauigkeit in vollem Maße Rechnung getragen. Allerdings ist auf der anderen Seite nicht zu verkennen, daß zwischen den im Grunde so einfachen Sätzen, um die es sich handelt, und dem großen Apparate, der zu ihrer Begründung aufgeboten wird, ein gewisses Mißverhältnis besteht. Es dürfte wohl nicht zu gewagt sein zu glauben, daß sich ein viel kürzerer Weg müßte finden lassen.

Um zum Schlusse die Eigenart des Buches zusammenfassend zu charakterisieren, möge es gestattet sein, einen Vergleich aus der Optik heranzuziehen: Es wird in dem Buche gewissermaßen ein kleiner und schmaler Streifen aus einem Spezialgebiete der Analysis unter die Lupe genommen und in mikroskopischer Vergrößerung — vor dem Auge des Lesers aufgerollt.

Josef Grünwald.

Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Von Dr. E. Jahnke, etatsmäßiger Professor an der königl. Bergakademie zu Berlin. Mit 32 Figuren im Text. XII. u. 235 S. gr. 8. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Preis: geb. M. 5·60.

Das Buch beschäftigt sich nicht allein mit dem, was man gewöhnlich Vektorenrechnung nennt, sondern hat als eine Einführung in die Graßmannsche Ausdehnungslehre zu gelten, in die das Rechnen mit Vektoren sich ja bekanntlich einordnen läßt. Dabei geht der Verfasser offenbar von dem Grundsatze aus, daß der Wert einer Methode sich am besten in der Anwendung auf besondere Aufgaben zeigt. In der Tat beruht der Hauptwert des Buches in der Fülle der gebotenen Anwendungen der Ausdehnungslehre auf die verschiedensten Teile der Geometrie (insbesondere auch neuere Dreiecksgeometrie), Mechanik und mathematischen Physik. Der Leser wird freilich manchmal nur mit Schwierigkeit die aus großen Gebieten herausgegriffenen, durchaus nicht immer elementaren Aufgaben völlig verstehen, da die hiezu nötigen Begriffe selbstverständlich nur ganz kurz erläutert werden konnten; aber die große Auswahl bietet sicherlich jedem Interessantes. Die Arbeit, welche diese verdienstvolle Zusammenstellung erforderte, verdient alle Anerkennung.

Das Buch besitzt aber bei seinen sonstigen Vorzügen einen Fehler, von dem ich fürchte, daß er auf manchen Leser abschreckend wirken wird: der Aufbau der Theorie ist undurchsichtig und läßt an Strenge sehr viel zu wünschen übrig. Fast nirgends sind Annahmen und Folgerungen klar auseinandergehalten, notwendige Beweise werden durch Definitionen ersetzt u. s. w. Beispiele dafür bietet jedes einzelne Kapitel. Ich verstehe, daß der Verfasser in dem löblichen Bestreben, Anwendung zu bringen, auf eine breite Ausarbeitung der theoretischen Grundlagen in den Vorlesungen, denen dieses Buch entsprossen, nur wenig Zeit aufwenden wollte und konnte. Aber so hätte er es im Interesse der Ausdehnungslehre nicht machen sollen. Denn jeder mit einigem kritischen Geiste begabte Hochschüler wird das Unlogische dieses Verfahrens erkennen und nun glauben, diese Unklarheiten lägen in der Graßmannschen Schöpfung selbst, die doch, mit ganz geringen Ausnahmen, ein Muster logischen Denkens ist. Nur um gegen diese Meinung anzukämpfen, mußte ich diesen Fehler des Buches hervorheben.

Dadurch daß der Verfasser den in der Physik üblich gewordenen verschiedenartigen Bezeichnungen Rechnung getragen, hat die ursprünglich Graßmannsche Bezeichnung an Einfachheit gar manches verloren. Mir dünkt es z. B. sonderlich, wenn man ein Gebilde, das sich als Differenz zweier anderer darstellen läßt, nun mit einem neuen Zeichen versieht (Punkt-Strecke). Aber dies ist schließlich unwesentlich. Bedenklicher für das Verständnis ist das Vermeiden von Zwischenklammern; bei einer neuen Auflage sollten sie statt der jetzigen, vom Auge nicht immer beachteten Zwischenräume gesetzt werden, wenn auch die Formeln dadurch ein scheinbar weniger einfaches Aussehen erhalten.

Das weitere Eingehen auf Einzelheiten würde zu weit führen. Erwähnen möchte ich nur noch, daß der auf S. 125 (unten) angemerkte Determinantensatz in dieser Form unrichtig ist, da die zwischen den α_{ik} bestehenden Relationen wohl quadratisch sind, aber nicht die angegebene Form haben.

Das Buch kann also allen jenen bestens empfohlen werden, die sich, ohne Bedürfnis nach stichhaltigen Begründungen, mit den Begriffen und Rechnungsregeln der Ausdehnungslehre (unter besonderer Berücksichtigung der Vektorenrechnung) rasch bekannt machen oder hübsche Anwendungen dieser Disziplin kennen lernen wollen. *E. Müller.*

Nichteuklidische Geometrie. Von Heinrich Liebmann, a. o. Prof. a. d. Universität Leipzig. G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1905. Sammlung Schubert XLIX. VIII + 248 S. u. 22 Textfiguren. Preis: geb. M. 6·50.

Die nichteuklidische Geometrie wurde von Gauß, Lobatschefskij und J. Bolyai rein logisch aufgebaut, ohne daß ihnen eine Realisierung vorschwebte. Sie erregte jedoch die Aufmerksamkeit weiterer Kreise erst dann,