Über die Sextupel von geraden Linien, welche von sämmtlichen Punkten einer cubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden.

Von **Gustav Kohn** in Wien.

Der Ort der Spitzen aller Kegel zweiter Ordnung, welche sechs gegebene gerade Linien berühren, ist bekanntlich*) eine Fläche achter Ordnung. Es ist klar, dass, wenn von den sechs Geraden zwei sich schneiden, deren Ebene einen Bestandtheil der Fläche achter Ordnung bildet. Man sieht infolge dessen sofort, dass, wenn man die sechs Geraden so annimmt, dass fünf Schnittpunkte entstehen (ohne drei von den Geraden in dieselbe Ebene zu legen), als Ort der Punkte, von denen aus die sechs Geraden als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden, eine Fläche dritter Ordnung erhalten wird.

Nicht von vornherein ersichtlich ist aber — es wird dies durch die folgende Untersuchung dargethan — dass der Charakter dieser Fläche dritter Ordnung durch die sechs Geraden in so einfacher Weise bestimmt ist, dass man auch umgekehrt in die Lage kommt, von einer gegebenen Fläche dritter Ordnung ausgehend, Sextupel von geraden Linien anzugeben, welche, von den sämmtlichen Flächenpunkten aus gesehen, als sechs Tangenten eines Kegelschnittes erscheinen.

Von den Nebenresultaten, welche sich bei dieser Untersuchung ergeben, scheinen mir diejenigen, welche sich auf die allgemeine Fläche dritter Ordnung (§ 2) und diejenigen, welche sich auf die Regelfläche beziehen (§ 5), ein gewisses Interesse zu besitzen.

§ 1. Allgemeines.

Hierholzer findet a. a. O. für die Fläche achter Ordnung F_8, welche von den Scheiteln der Kegel zweiter Ordnung

*) Vgl. Cayley, Memoir on Quartic surfaces. Proc. Lond. Math. Soc. Vol. III; On a surface of the eight order, Math. Ann. Bd. VI; Hierholzer, Über Kegelschnitte im Raume. Math. Ann., Bd. II.

erfüllt wird, die sechs willkürliche gerade Linien 1, 2, 3, 4, 5, 6 berühren, die folgenden Eigenschaften:

1. Die sechs Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind für die Fläche F_8 Doppelgeraden.

2. Die Fläche enthält einfach die beiden Transversalen, welche je vier von den sechs Geraden besitzen.

3. Die Fläche geht durch die Schnittcurve von je zwei Hyperboloiden hindurch, von denen das eine drei von den sechs Geraden und das andere die drei übrigen enthält.

Durch diese Sätze ist der volle Schnitt der Fläche F_8 mit einem Hyperboloid gegeben, welches drei von den sechs Geraden enthält, ein Schnitt, den auch die geometrische Überlegung sofort anzugeben lehrt.

Den eben reproducierten Hierholzer'schen Sätzen, welche Linien der Fläche angeben, fügen wir den folgenden hinzu, welcher Punkte der Fläche liefert:

Die Fläche F_8 geht durch jeden Punkt, in welchem drei einzeln durch drei von den sechs Geraden an das Hyperboloid der drei übrigen gelegten Tangentialebenen sich treffen.

Der Schnittpunkt von drei einzeln durch die Geraden 1, 2, 3 an das die Geraden 4, 5, 6 enthaltende Hyperboloid gelegten Tangentialebenen liegt deshalb auf der Fläche F_8, weil der von diesem Punkte an das Hyperboloid gehende Tangentenkegel offenbar die sechs Ebenen berührt, die ihn mit unseren sechs Geraden verbinden.

Wenn die sechs Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6 fünf Schnittpunkte besitzen, ohne dass sich drei davon in derselben Ebene befinden, so besteht die Fläche F_8 aus den fünf Verbindungsebenen von je zwei unter den sechs Geraden, die sich treffen, dem Ort der Punkte, von denen aus die sechs Geraden als fünf Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden, und einer Fläche dritter Ordnung F_3, dem Ort der Punkte, von welchen aus die sechs Geraden als sechs Tangenten eines Kegelschnitts erscheinen.

Es gibt verschiedene Arten von Sextupeln gerader Linien mit fünf Schnittpunkten; aber jede dieser Arten hängt von $4.6-5=19$, also von ebensoviel Constanten ab, wie die allgemeine Fläche dritter Ordnung. Wir werden nun im Folgenden für jede Art von solchen Sextupeln die zugehörige Fläche F_3 zu untersuchen haben. Ergibt sich die Fläche F_3 für eine bestimmte Art von Sextupeln als eine allgemeine, so werden wir für die Fläche nur eine endliche Anzahl von Sextupeln zu erwarten haben, für welche sie die Fläche F_3 darstellt; ergibt sich aber die Fläche F_3 als eine specielle mit der Constantenzahl $19-c$, so wird es ∞^c solche Sextupel von Geraden geben, die von allen Flächenpunkten als sechs Tangenten eines Kegelschnitts erscheinen.

§ 2. Die allgemeine Fläche.

I.

Es seien fünf gerade Linien a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 vorgelegt, welche von derselben sechsten Geraden b_6 getroffen werden.

Die Fläche F_8, der Ort der Scheitel der Kegel zweiter Ordnung, welche die sechs Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_6 berühren, zerfällt hier in die fünf Ebenen, welche die fünf Geraden mit der sechsten verbinden, und eine Fläche dritter Ordnung F_3.

Nach § 1 liegen auf der Fläche F_3 die fünf Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, weil sie der Fläche F_8 doppelt angehören müssen, und auch die Gerade b_6 wird sich ganz auf der Fläche F_3 befinden, weil sie mit ihr fünf Punkte, die Treffpunkte mit den Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, gemein hat.

Durch die Bedingung, fünf beliebige windschiefe Gerade zu enthalten, welche eine gemeinsame Transversale besitzen, ist bekanntlich eine allgemeine Fläche dritter Ordnung eindeutig bestimmt.*)

Wir finden daher:

Sechs gerade Linien einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung, von denen fünf windschief sind und alle von der sechsten getroffen werden, erscheinen, von sämmtlichen Flächenpunkten aus gesehen, als sechs Tangenten eines Kegelschnitts.

II.

Es seien jetzt zwei Paare von windschiefen Geraden gegeben: Das Paar g_1, g_2 und das Paar g_3, g_4 und die beiden Transversalen t, t', welche von einem beliebigen Raumpunkt aus an diese beiden Geradenpaare beziehungsweise gelegt werden können.

Die durch diese sechs Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, t, t' bestimmte Fläche F_8 zerfällt in die fünf Ebenen $t\,t'$, $g_1\,t$, $g_2\,t$, $g_3\,t'$, $g_4\,t'$ und eine Fläche dritter Ordnung F_3, über die wir das Folgende aussagen können:

1. Die Fläche F_3 geht durch das Quadrupel $g_1\,g_2\,g_3\,g_4$ von windschiefen Geraden hindurch (weil diese Geraden der Fläche F_8 doppelt angehören und der sich im vorliegenden Falle von dieser Fläche abspaltende Ebenenort die Geraden dieses Quadrupels nur einfach enthält).

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes. II. Bd., Art. 286 der 2. Aufl., wo auch gezeigt ist, wie man die übrigen Geraden einer so bestimmten Fläche dritter Ordnung finden kann.

2. Die Fläche F_3 enthält noch das Quadrupel der windschiefen Geraden l_1, l_2, l_3, l_4, wo l_1 und l_2 die Transversalen vom Punkte $g_2\, t$, bezw. $g_1\, t$ an das Geradenpaar $g_3\, g_4$ und l_3, l_4 die Transversalen von den Punkten $g_4\, t'$ und $g_3\, t'$ an das Geradenpaar $g_1\, g_2$ bedeuten. (Denn jede der Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 trifft vier von den sechs Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, t, t', ohne in den Ebenenort zu fallen, der sich von F_8 abspaltet.)

Die beiden Quadrupel von Geraden

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{matrix}$$

bilden eine Doppelvier auf der Fläche F_3*), d. h. jede Gerade des einen Quadrupels ist windschief zur entsprechenden des anderen Quadrupels und schneidet seine drei übrigen Geraden.

Unsere Doppelvier hat die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie der Punkte $g_1\, l_2$ und $g_2\, l_1$, d. i. die Gerade t, von der Verbindungslinie der Punkte $g_3\, l_4$ und $g_4\, l_3$, d. i. die Gerade t', getroffen wird.

Diese Eigenschaft muss aber jeder Doppelvier von Geraden einer Fläche dritter Ordnung zukommen. Denn schon durch die sieben Geraden einer Doppelvier g_1, g_2, g_3, g_4, l_1, l_2, l_3, für welche diese Eigenschaft noch nicht in Betracht kommt, geht nur eine einzige Fläche dritter Ordnung. Für diese Fläche dritter Ordnung ist nämlich ein Punktort von höherer als neunter Ordnung angebbar und durch einen solchen kann nicht mehr als eine Fläche dritter Ordnung hindurchgehen. Wir haben nämlich für die Fläche dritter Ordnung neben den 7 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, l_1, l_2, l_3 noch die beiden Transversalen, welche das Quadrupel g_1, g_2, g_3, g_4 besitzt; dann aber auch die dritte Gerade, welche die Fläche mit jeder von den beiden Ebenen $g_1\, l_2$ und $g_2\, l_1$ gemein hat. Die dritte Gerade in der Ebene $g_1\, l_2$ ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte von g_2 und l_1 mit dieser Ebene, die dritte Gerade in der Ebene $g_2\, l_1$ die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit g_1 und l_2.

Wir schließen, dass jede Fläche dritter Ordnung, für welche durch das Schema

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{matrix}$$

eine Doppelvier von Geraden gegeben ist, angesehen werden kann als Ort der Punkte, von welchen aus die sechs Geraden $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$, t, t' als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden, wobei t die Verbindungslinie der Punkte $g_1\, l_2$ und $g_2\, l_1$ und t' die vom Punkte $g_4\, l_3$ an die beiden Geraden g_3 und t gelegte Transversale bedeutet, und haben das Resultat:

*) Dieser Name ist von Sturm eingeführt (Math. Ann. Bd. 23).

Der Ort der Punkte, von welchen aus zwei Paare von windschiefen Geraden nebst den zu jedem Paar aus demselben willkürlichen Punkte gelegten Transversalen als sechs Tangenten eines Kegelschnittes gesehen werden, ist eine allgemeine Fläche dritter Ordnung.

Als Umkehrung dieses Satzes haben wir eben folgenden: Bilden die Geraden

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{matrix}$$

eine Doppelvier auf einer Fläche dritter Ordnung, so erscheinen die vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, zusammen mit der Verbindungslinie t der Punkte $g_1\, l_2$ und $g_2\, l_1$ und der Verbindungslinie t' der Punkte $g_3\, l_4$ und $g_4\, l_3$, von jedem Punkte der Fläche aus gesehen, als sechs Tangenten eines Kegelschnittes.

Unser Resultat können wir auch dahin interpretieren, dass die sechs Geraden $g_1, t, g_2, g_3, t', g_4$, aus jedem beliebigen Punkte x einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung F_3 durch die sechs Seitenflächen eines Brianchon'schen Sechskants projiciert werden, d. h. eines Sechskants, bei dem die Verbindungsebenen der drei Gegenkantenpaare sich in einem Strahle treffen. Diese drei Ebenen sind: 1. die Ebene, welche den Punkt x mit den Punkten $g_1\, t$ und $g_3\, t'$ verbindet, 2. die Ebene, welche diesen Punkt mit den Punkten $t\, g_2$ und $t'\, g_4$ verbindet, 3. die Ebene ξ, welche die Transversalen verbindet, die man vom Punkte x aus an die Geradepaare $g_2\, g_3$ und $g_4\, g_1$ legen kann.

Da die beiden Geraden t und t' in derselben Ebene liegen, so gibt es einen bestimmten Punkt δ, in welchem die Verbindungslinie der Punkte $g_1\, t$ und $g_3\, t'$ von der Verbindungslinie der Punkte $t\, g_2$ und $t'\, g_4$ getroffen wird und unsere Relation besagt, dass die Ebene ξ durch diesen Punkt hindurchgeht. Es folgt:

Legt man durch einen variablen Punkt x der Fläche F_3 die Transversale an das Geradenpaar $g_2\, g_3$ und die Transversale an das Geradenpaar $g_4\, g_1$, so geht die Verbindungsebene dieser Transversalen fortwährend durch den Punkt δ hindurch.

Man kann diesem Resultat auch die folgende Fassung geben:

Verbindet man in jeder durch den Punkt δ hindurchgelegten Ebene sowohl die Schnittpunkte der Geraden g_2 und g_3 mit einander, als auch die Schnittpunkte der Geraden g_4 und g_1, so erhält man als Ort der Schnittpunkte dieser Verbindungslinien die Fläche F_3.

Dies ist offenbar nichts anderes, als die Grassmann-Schröter'sche Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung.*) Man schließt aus dieser Erzeugungsweise sofort, dass die Fläche F_3 durch die beiden Transversalen m_{23} und m_{41} hindurchgeht, welche vom Punkte δ aus an die Geradenpaare $g_2\, g_3$ und $g_4\, g_1$ gezogen werden können. Man erkennt auch umgekehrt leicht, dass, wenn eine Fläche dritter Ordnung ein Quadrupel von windschiefen Geraden und außerdem die Transversalen enthalten soll, welche von einem beliebigen Punkt δ aus an zwei Geraden des Quadrupels und an die zwei übrigen gehen, diese Fläche eindeutig bestimmt ist, und unter Zugrundelegung des gegebenen Geradenquadrupels und des Punktes δ nach der eben erörterten Grassmann-Schröter'schen Methode erzeugt werden kann.

In seiner Abhandlung „Über die 27 Geraden einer cubischen Fläche" **) hat Sturm die Beziehung untersucht, in welcher ein Quadrupel von windschiefen Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 zu den übrigen Geraden der Fläche steht. Er findet drei Paare von geraden Linien $m_{23}\, m_{41}$, $m_{13}\, m_{24}$, $m_{12}\, m_{34}$, welche das Quadrupel zweimal treffen, wobei die Gerade m_{ik} die Geraden g_i und g_k trifft, und je zwei demselben Paar angehörige Geraden m sich schneiden, und zwar bezw. in den Punkten $\delta, \delta', \delta''$. Die drei Paare von Geraden m werden von derselben Flächengeraden h getroffen, welche zu den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 windschief ist. Überhaupt zerfallen, wie Sturm zeigt, die 16 Geraden, welche zu jener Flächengeraden h windschief sind, in vier Quadrupel, welche zu den sechs Geraden m in derselben Beziehung stehen, wie das Quadrupel der Geraden g. Sie bestehen aus dem Quadrupel $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$, seinem „Gegenquadrupel" $l_1\, l_2\, l_3\, l_4$, welches dasselbe zu einer Doppelvier ergänzt, endlich aus den zwei Quadrupeln $n_1\, n_2\, n_3\, n_4$, $n'_1\, n'_2\, n'_3\, n'_4$, welche ebenfalls zusammen eine Doppelvier bilden und aus den das Quadrupel der g einmal treffenden Geraden bestehen.

Legt man durch irgend einen der Punkte $\delta, \delta', \delta''$ eine Ebene hindurch, so wird nach Obigem jedes unserer vier Quadrupel in den vier Ecken eines Vierecks getroffen, von dem zwei Gegenseiten sich auf der Fläche schneiden. Infolge dessen wird die Ebene der drei Punkte $\delta, \delta', \delta''$ von jedem unserer vier Quadrupel in den vier Ecken eines Viereckes getroffen werden, für welche alle drei Gegenseitenpaare sich auf der Fläche schneiden.

Mit Rücksicht auf den bekannten Satz, nach welchem, wenn die Ecken und Diagonalpunkte eines Vierecks auf einer ebenen

---

*) Vergl. Nr. 13 des Verzeichnisses der Erzeugungsarten, welches Sturm (Math. Ann., Bd. XXIII, S. 308) gegeben hat und die Note zu diesem Verzeichnis (im selben Bande, S. 599).

**) Math. Ann., Bd. XXIII, S. 289.

Curve dritter Ordnung liegen, die vier Ecken ein „Berührungsquadrupel“, d. i. das System der Berührungspunkte der von einem Curvenpunkte ausgehenden Tangenten, darstellen, haben wir das Resultat:

Auf der Schnittcurve einer Fläche dritter Ordnung mit einer Ebene, welche die nicht auf der Flächengeraden h gelegenen Berührungspunkte von drei durch h gehenden Tritangentialebenen verbindet, werden von den 16 Schnittpunkten der 16 zu h windschiefen Flächengeraden vier Berührungsquadrupel gebildet.

Legt man eine beliebige Ebene durch zwei von den Punkten δ, δ', δ'', so wird jedes unserer vier Geradenquadrupel in den Ecken eines Vierecks getroffen, für welches zwei Paare von Gegenseiten sich auf der Fläche schneiden, d. h. die Schnittpunkte eines Quadrupels bilden zwei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits, dessen drittes Eckenpaar ebenfalls auf der Fläche liegt.

Mit Rücksicht auf den bekannten Satz, dass je zwei Gegenecken eines einer ebenen Curve dritter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Vierseits denselben Tangentialpunkt besitzen, ergibt sich:

Legt man durch die außerhalb der Flächengeraden h gelegenen Berührungspunkte von zwei durch h hindurchgelegten Tritangentialebenen eine beliebige Ebene, so werden auf der Schnittcurve dieser Ebene mit der Fläche dritter Ordnung die 16 Treffpunkte der 16 zu h windschiefen Flächengeraden in acht Paare von je zwei Punkten mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt zerfallen.

§ 3. Die Fläche mit einem Doppelpunkt.

I.

Es seien vier beliebige windschiefe Geraden vorgelegt: a_1, a_2, a_3 und d, ferner eine Gerade b, welche die drei Geraden a_1, a_2, a_3 trifft und eine Gerade c, welche b und d schneidet.

Die durch die sechs Geraden a_1, a_2, a_3, b, c, d bestimmte Fläche F_8 besteht aus den fünf Ebenen $a_1 b$, $a_2 b$, $a_3 b$, bc, cd und der Fläche dritter Ordnung F_3, für welche die allgemeinen Sätze des § 1 das Folgende ergeben.

Die Fläche F_3 geht durch die vier Geraden a_1, a_2, a_3, d hindurch, weil diese Geraden der Fläche F_8 doppelt angehören, die ebenen Bestandtheile von F_8 aber diese Geraden nur einfach enthalten. Auf der Fläche F_3 liegen ferner die drei Transversalen t_1, t_2, t_3, welche man vom Punkte cd aus an je zwei unter den drei Geraden $a_1\, a_2\, a_3$ legen kann, weil jede dieser Transversalen vier von den Geraden $a_1, a_2, a_3\; b, c, d$ trifft, ohne in einer der in F_3 enthaltenen Ebenen zu liegen. Hieraus folgt, dass der Punkt cd ein Doppelpunkt für die Fläche F_3 ist, denn die nicht in derselben Ebene gelegenen Flächengeraden d, t_1, t_2, t_3 gehen durch ihn hindurch.

Wir haben für die Fläche F_3 noch weitere Geraden in den beiden Transversalen l, l', welche das Quadrupel $a_1\, a_2\, a_3\; d$ und in der Transversale g, welche das Quadrupel $a_1\, a_2\, a_3\; c$ neben b noch besitzt.

Im ganzen haben wir hiermit 10 Flächengeraden $a_1, a_2, a_3, d, t_1, t_2, t_3, l, l', g$ abgeleitet, durch welche jedenfalls nur eine einzige Fläche dritter Ordnung hindurchgeht. Ohne an diesen zehn Flächengeraden, also an der Fläche F_3, etwas zu ändern, kann man das System der zugrundeliegenden sechs Geraden $a_1\, a_2\, a_3\; b, c, d$ in der folgenden Weise variieren:

Man hält die Geraden a_1, a_2, a_3, d fest, wählt an Stelle von b eine beliebige andere Transversale b' des Tripels a_1, a_2, a_3 und an Stelle von c die Transversale c', welche vom Doppelpunkt cd der Fläche an das Geradenpaar b, g gelegt werden kann.

Damit ist das folgende Resultat begründet:

Alle ∞^1 Kegel zweiter Ordnung, welche ihren Scheitel auf einer Fläche dritter Ordnung mit Doppelpunkt haben und vier windschiefe Gerade dieser Fläche a_1, a_2, a_3, d, von denen die letzte durch den Doppelpunkt geht und außerdem eine beliebig gewählte Transversale b des Tripels $a_1\, a_2\, a_3$ berühren, tangieren noch eine und dieselbe sechste Gerade c. Diese Gerade c ist die Transversale, welche man vom Doppelpunkt aus an das Geradenpaar b, g legen kann, wo g diejenige Gerade der Fläche bedeutet, welche neben den beiden Transversalen des Quadrupels a_1, a_2, a_3, d die Geraden des Tripels a_1, a_2, a_3 schneidet.

II.

Es seien vier windschiefe Gerade gegeben g, g', b, d, ferner eine Gerade a, welche die Geraden des Tripels $gg'b$ schneidet und eine Gerade c, welche die Geraden b und d trifft.

Die Fläche dritter Ordnung F_3, welche als Ort der Punkte auftritt, von welchen aus die sechs Geraden g, g', a, b, c, d als *sechs* Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden, enthält die folgenden geraden Linien: 1. die Geraden g, g', d; 2. die beiden Verbindungslinien h', h des Punktes cd mit den Punkten ga und $g'a$; 3. die Transversale h'', welche vom Punkte cd an das Geradenpaar gg' gelegt werden kann; 4. die Transversale l vom Punkte bc an dasselbe Geradenpaar; endlich 5. die beiden Transversalen $l' l''$, welche das Quadrupel $gg'bd$ besitzt.

Die drei unter 1. angegebenen Geraden liegen auf der Fläche F_3, weil sie dem Ebenenort, welcher mit dieser Fläche zusammen die Fläche F_8 bildet, nur einfach angehören; alle übrigen genannten geraden Linien sind deswegen auf F_3 gelegen, weil sie vier von den 6 Geraden g, g', a, b, c, d treffen, ohne in einen ebenen Bestandtheil der Fläche F_8 zu fallen.

Die neun Geraden, welche wir für die Fläche F_3 abgeleitet haben: $g, g', d, h, h', h'', l, l', l''$, bestimmen diese Fläche vollständig. Wir können nämlich diesen Geraden z. B. auch noch die dritte Schnittlinie g'' der Fläche F_3 mit der Ebene hinzufügen, welche die Geraden h, h' verbindet und als Verbindungslinie der Treffpunkte der Geraden l, l', l'' mit dieser Ebene gegeben ist.

Dann haben wir 10 gerade Linien, durch welche nicht mehr als eine Fläche dritter Ordnung hindurchgehen kann.

Die Fläche F_3 besitzt einen Doppelpunkt in dem Schnittpunkt von c und d, weil durch ihn außer d noch die drei nicht in derselben Ebene gelegenen Geraden h, h', h'' hindurchgehen. In den beiden Tripeln $g, g' g''$ und l, l', l'' haben wir zwei (sich zu dem vollen Durchschnitt eines Hyperboloids) ergänzende Tripel von Geraden der Fläche F_3; die Gerade b wird erhalten als Verbindungslinie der Schnittpunkte von g und g' in der Ebene, welche g'' mit dem Doppelpunkt verbindet und liegt also auf dem Hyperboloid, das die Geraden g, g', g'' bestimmen. Auf diesem Hyperboloid, das mit F_3 die Geraden g, g', g''; l, l', l'' gemein hat, liegt auch die Gerade b, welche l, l', l'' trifft und also zum selben System von Erzeugenden gehört wie die Geraden g, g', g''.

Diese Bemerkungen erlauben es, wenn eine Fläche dritter Ordnung mit Doppelpunkt vorgelegt ist, unendlich viele Systeme von 6 Geraden g, g', a, b, c, d zu construieren, für welche die vorgelegte Fläche als Ort der Punkte auftritt, von welchen die 6 Geraden als 6 Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden.

Wir haben den Satz:

Sind auf einer Fläche dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt zwei ergänzende Geradentripel $gg'g''$ und l, l', l'' vorgelegt und man construiert die Verbindungslinie a der Schnittpunkte von g und g' in der Ebene, die g'' mit dem Doppelpunkt verbindet, ferner eine beliebige Erzeugende b der durch g, g', g'' bestimmten Regelschaar, deren Schnittpunkt mit der Geraden l man durch die Gerade c mit dem Doppelpunkt verbindet und legt endlich noch von dem Doppelpunkt aus die Transversale d zu dem Geradenpaar $l'\,l''$, so hat man in den Geraden g, g', a, b, c, d sechs gerade Linien, welche von jedem Punkte der Fläche dritter Ordnung als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden.

§ 4. Die Fläche mit zwei Doppelpunkten.

I.

Es seien drei windschiefe Geraden g, g' und l vorgelegt, eine Gerade a, welche g, und eine Gerade a', welche g' schneidet, endlich eine Gerade b, welche die Geraden a, a' und l trifft.

Die sechs Geraden g, g', l, a, a', b werden von den sämmtlichen Punkten einer Fläche dritter Ordnung F_3 als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen, welche zusammen mit den fünf Ebenen $a\,g$, $a'\,g'$, $a\,b$, $a'\,b$, $b\,l$ die Fläche F_8 des allgemeinen Falles bildet.

Drei von den sechs Geraden, nämlich g, g', l, liegen auf der Fläche F_3, da sie den ebenen Bestandtheilen von F_8 nur einfach angehören.

Die Fläche F_3 geht außerdem hindurch durch die Transversale c, die vom Punkte $a\,g$ aus an das Geradenpaar $a'\,l$ geht und die Transversale c' vom Punkte $a'\,g'$ an das Geradenpaar $a\,l$, ferner durch die Verbindungslinie d der Punkte $a\,g$ und $a'\,g'$, endlich durch die vom Punkte $b\,l$ aus an das Geradenpaar $g\,g'$ gelegte Transversale l'.

Wir schließen, dass die beiden Punkte $a\,g$ und $a'\,g'$ Doppelpunkte für die Fläche F_3 sind, da wir für jeden dieser beiden Punkte drei nicht in derselben Ebene gelegene Gerade der Fläche kennen, nämlich bezw. g, c, d und g', c', d, welche durch ihn hindurchgehen. Die Ebene $l\,l'$ wird die Fläche F_3, außer in den Geraden l, l', noch in einer dritten Geraden treffen, die durch den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Geraden d hindurchgehen wird und wir erlangen das folgende Resultat:

Es sei eine Fläche dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten vorgelegt; es seien l und l' zwei sich schneidende Geraden der Fläche, die durch keinen ihrer Doppelpunkte hindurchgehen; es seien ferner g und c zwei Geraden der Fläche durch den einen Doppelpunkt, von denen die erste l', die zweite l trifft, und g' und c' seien zwei ebensolche

Geraden durch den zweiten Doppelpunkt: dann sind die drei Geraden g, g', l in Verbindung mit einer beliebigen durch den ersten Doppelpunkt zu einem Punkte von c' gezogenen Geraden a, einer beliebig durch den zweiten Doppelpunkt zu einem Punkte von c gezogenen Geraden a' und der vom Punkte $l\,l'$ an das Geradenpaar $a\,a'$ gelegten Transversale b, sechs gerade Linien, die von jedem Flächenpunkte aus als sechs Tangenten eines Kegelschnittes gesehen werden.

Die Fläche dritter Ordnung dieses Satzes hat nämlich mit der durch das Sextupel von Geraden g, g', a, a', b, l bestimmten Fläche F_3 die Geraden gemein g, g', c, c', l, l', d und muss deshalb mit ihr zusammenfallen. Denn gäbe es einen Büschel von Flächen dritter Ordnung, welche durch diese sieben Geraden hindurchgehen, so müsste die Fläche desselben, die durch einen willkürlichen Punkt p der Ebene $c\,d$ gelegt ist, diese Ebene als Bestandtheil enthalten, weil der Punkt p nicht auf der Verbindungslinie des Doppelpunktes $g'\,d'$ mit dem Schnittpunkte von l' liegen wird. Die Geraden g, g', c', l, l' müssten dann auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegen, was nicht angeht, da von diesen Geraden g, g', l windschief sind, von der Geraden c' aber nicht sämmtlich getroffen werden.

II.

Es seien sechs gerade Linien $g, a_1, a_2, a_3, a_4, g'$ vorgelegt, von denen je zwei aufeinanderfolgende sich schneiden. Wir erhalten dann eine cubische Fläche F_3 als Ort eines variablen Punktes x, von welchem aus die sechs Geraden $g, a_1, a_2, a_3, a_4, g'$ durch die sechs Seitenflächen eines Brianchon'schen Sechskants projiciert werden, d. i. eines Sechskants, bei welchem die drei Verbindungsebenen der drei Gegenkantenpaare sich in demselben Strahl durchdringen.

Die Verbindungsebenen der drei Gegenkantenpaare sind: 1. die Ebene, welche den Punkt x mit der Verbindungslinie l der Punkte $g\,a_1$ und $a_3\,a_4$ verbindet, 2. die Ebene, welche den Punkt x mit der Verbindungslinie l' der Punkte $a_1\,a_2$ und $a_4\,g'$ verbindet, 3. die Ebene, welche den Schnittpunkt δ der Geraden a_2 und a_3 verbindet mit der Transversale, die man vom Punkte x aus an das Geradenpaar g, g' legen kann. Die Schnittlinien der beiden ersten unter diesen Ebenen mit der dritten sind in dieser dritten Ebene offenbar die Verbindungslinien der Durchstosspunkte der Geraden l und l' mit dem Punkte x, und diese beiden Verbindungslinien müssen also zusammenfallen, wenn der Punkt x ein Punkt der Fläche F_3 ist. Es wird also in diesem Fall in der dritten

Ebene die Verbindungslinie ihrer Treffpunkte mit den Geraden l und l' von der Verbindungslinie ihrer Treffpunkte mit den Geraden g und g' im Punkte x getroffen werden und wir haben für die Fläche F_3 die folgende Erzeugsart:

Legt man durch den Punkt δ (den Schnittpunkt von a_2 und a_3) eine variable Ebene und bringt die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit dem Geradenpaar $g\,g'$ zum Durchschnitt mit der Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit dem Geradenpaar $l\,l'$, so erhält man als Ort der entstehenden Durchschnittspunkte die Fläche F_3.

Dies ist eine Erzeugung der Fläche F_3 nach der Grassmann-Schröter'schen Methode (vgl. § 2, II), doch besteht zwischen den Geraden g, g', l, l' die Beziehung, dass die Geraden g und l sich treffen (im Punkte $g\,a_1$) und ebenso die Geraden g' und l' (im Punkte $a_4\,g'$). Diese beiden Punkte sind Doppelpunkte für die Fläche F_3, weil aus der Erzeugung hervorgeht, dass die Verbindungslinie dieser Punkte auf der Fläche liegt ebenso wie die Geraden g, g', l, l', so dass durch jeden dieser Punkte drei nicht in derselben Ebene gelegene Geraden der Fläche hindurchgehen. Aus der Erzeugung folgt auch noch, dass die Transversalen auf der Fläche liegen, welche vom Punkte δ, bezw. an die Geradenpaare $g\,g'$ und $l\,l'$ gelegt werden können. Es folgt:

Ist eine Fläche dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten vorgelegt und δ der Schnittpunkt von zwei durch keinen Doppelpunkt gehenden Geraden der Fläche, sind ferner g, l zwei Geraden der Fläche durch den einen Doppelpunkt und $g'\,l'$ zwei durch den anderen, so beschaffen, dass die Geraden g, g' die eine von den beiden durch δ gehenden Flächengeraden treffen und die Geraden l, l' die andere; dann kann man die beiden Geraden g, g' noch auf ∞^2 Arten durch ein Geradenquadrupel $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ zu einem Sextupel von Geraden ergänzen, welches von jedem Punkte der Fläche als Brianchon'sches Sechseck gesehen wird, und zwar in der folgenden Weise. Die Gerade a_1 ist die Verbindungslinie des Doppelpunktes $g\,l$ mit einem beliebigen Punkt von l', derselbe Punkt mit δ verbunden liefert a_2, δ mit einem beliebigen Punkt von l verbunden a_3, dieser Punkt mit dem Doppelpunkt $g'\,l'$ verbunden a_4.

Die Richtigkeit dieses Satzes beruht darauf, dass die Fläche unter Zugrundelegung des Punktes δ und der beiden Geradenpaare $g\,g', l\,l'$ nach der Grassmann-Schröter'schen Methode erzeugt werden kann.

§ 5. Die Regelfläche.

I.

Es sei ein einfaches räumliches Fünfeck vorgelegt mit den fünf Ecken A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und den fünf Seiten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, wobei a_1 die Gegenseite von A_1, a_2 die Gegenseite von A_2 u. s. f. bedeuten mag.

Wir betrachten den Ort der Punkte, die so beschaffen sind, dass der Kegel zweiter Ordnung, welcher in einem von ihnen den Scheitel hat und die fünf Seiten $a_1, a_2, a_3, a_4\ a_5$ unseres Fünfeckes berührt, auch noch die beliebig im Raume angenommene Gerade d zur Tangente hat, d. h. die Fläche F_8, welche durch die sechs Geraden $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, d$ bestimmt ist.

Diese Fläche achter Ordnung zerfällt in die fünf Ebenen $a_1\,a_2,\ a_2\,a_3,\ a_3\,a_4,\ a_4\,a_5,\ a_5\,a_1$ und eine Fläche dritter Ordnung F_3, über die wir das Folgende aussagen können.

Die Fläche F_3 ist eine Regelfläche, denn sie besitzt in der Geraden d eine Doppelgerade. Nach § 1 ist nämlich d eine Doppelgerade der Fläche F_8, und da sie auf keiner der in unserem Falle in F_8 enthaltenen Ebenen liegt, so muss sie eine Doppelgerade für die Fläche F_3 sein.

Wir haben ferner fünf geradlinige Erzeugende der Fläche F_3 in den fünf Geraden $g_1\,g_2\,g_3\,g_4\,g_5$, die einzeln durch die Ecken des Fünfecks so gezogen sind, dass jede derselben neben der Seite des Fünfecks, die dem Eckpunkte, durch den sie geht, gegenüberliegt, auch noch die Gerade d trifft. Jede der Geraden $g_1\,g_2\,g_3\,g_4\,g_5$ schneidet nämlich vier von den sechs Geraden $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, d$, ohne in eine der in F_8 enthaltenen Ebenen zu fallen.

Als geradlinige Erzeugende einer Regelfläche dritter Ordnung haben die fünf Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 neben der doppelten Leitlinie noch eine zweite gemeinschaftliche Transversale, die einfache Leitlinie und eine Regelfläche dritter Ordnung ist bekanntlich durch Angabe ihrer beiden Leitlinien nebst fünf Erzeugenden eindeutig bestimmt.

Wir haben den Satz:

Der Ort der Punkte, von welchen aus die fünf Seiten eines räumlichen Fünfeckes und eine beliebige Gerade d als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden, ist die Regelfläche dritter Ordnung, welche die Gerade d zur Doppellinie besitzt und für welche die Transversale durch jeden Eckpunkt des Fünfecks eine geradlinige Erzeugende ist, welche neben der Gegenseite des Eckpunktes auch die Gerade d trifft.

Um in die Natur dieses Resultats einen besseren Einblick zu gewinnen, wollen wir hier eine kleine Hilfsbetrachtung anstellen.

Fünf beliebige gerade Linien g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 seien im Raume gegeben und es wird die Aufgabe gestellt, ein einfaches Fünfeck zu construieren, in welchem nicht nur die fünf Ecken der Reihe nach einzeln auf diesen fünf Geraden liegen, sondern auch deren Gegenseiten der Reihe nach einzeln diese fünf Geraden schneiden.

Um diese Aufgabe zu lösen, gehen wir aus von einem beliebigen Punkt X_1 der Geraden g_1, legen von ihm aus die Transversale an das Geradenpaar $g_4\ g_2$, von deren Treffpunkt X_2 auf g_2 legen wir die Transversale an das Geradenpaar $g_5\ g_3$, von dem Treffpunkt X_3 dieser Transversale legen wir wieder eine solche an das Geradenpaar $g_1\ g_4$, die den Punkt X_4 mit g_4 gemein haben mag; von diesem legen wir noch die Transversale an g_2 und g_5 und von deren Schnittpunkt X_5 mit g_5 endlich die Transversale an g_3 und g_1, welche g_1 im Punkte X_1' treffen mag. Fällt der Punkt X_1' mit dem Ausgangspunkt X_1 zusammen, so haben wir offenbar in den Punkten X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 die aufeinanderfolgenden Ecken für ein einfaches Fünfeck von der gewünschten Beschaffenheit.

Unserer Construction zufolge ist die Reihe der Punkte X_1 auf g_1 projectiv der Reihe der Punkte X_2 auf g_2, diese wieder projectiv der Reihe der Punkte X_3 auf g_3 u. s. f., so dass die Reihe der Punkte X_1 auf g_1 projectiv bezogen ist auf die Reihe der Punkte X_1' auf derselben Geraden. Entsprechend den beiden Doppelpunkten dieser Projectivität gelangen wir also im allgemeinen zu zwei Lösungen unserer Aufgabe.

Ist $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ ein einfaches Fünfeck, dessen Eckpunkte nebst ihren Gegenseiten der Reihe nach mit den fünf Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 incident sind, dann bilden dieselben Eckpunkte in der Reihenfolge A_1, A_3, A_5, A_2, A_4 ein einfaches Fünfeck, dessen Ecken der Reihe nach auf den Strahlen $g_1\ g_3\ g_5\ g_2\ g_4$ liegen und dessen Seitenflächen $A_4\ A_1\ A_3$, $A_1\ A_3\ A_5$, $A_3\ A_5\ A_2$, A_5, A_2, A_4, $A_2\ A_4\ A_1$ der Reihe nach einzeln durch diese Strahlen hindurchgehen. Es werden infolge dessen die fünf Geraden g als Nullstrahlen dem Nullsystem angehören, für welches die Nullebene jeder Ecke des Fünfeckes $A_1\ A_3\ A_5\ A_2\ A_4$ die Ebene ist, die sie mit den zwei Nachbarecken verbindet, d. h. der lineare Complex der Nullstrahlen des in dieser Weise durch das Fünfeck $A_1\ A_3\ A_5\ A_2\ A_4$ bestimmten Nullsystems ist identisch mit dem linearen Complexe, welchen die 5 Strahlen $g_1\,g_2\,g_3\,g_4\,g_5$ bestimmen.

Diese Bemerkung gestattet nicht uninteressante Folgerungen.

Besitzen die fünf Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 eine gemeinschaftliche Transversale, dann bilden deren Treffpunkte ein (freilich ausgeartetes) Fünfeck, von welchem sowohl die Ecken, als auch deren Gegenseiten der Reihe nach mit den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 incident sind. Ein eigentliches Fünfeck von derselben Beschaffenheit kann es nicht geben. Denn wäre A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ein solches, so hätten wir in den fünf Ecken und fünf Seitenflächen des einfachen Fünfeckes A_1, A_3, A_5, A_2, A_4, fünf Punkte nebst ihren Nullebenen für ein Nullsystem, dem die Strahen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 als Nullstrahlen angehören, d. h. diese fünf Strahlen würden neben dem axialen Complexe, dem sie der Voraussetzung nach angehören, auch noch in einem zweiten linearen Complex enthalten sein und müssten also noch eine zweite gemeinsame Transversale besitzen. Wir schließen, dass im Falle die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 eine gemeinsame Transversale, die auf der Geraden g_1 zwischen den Punkten X_1 und X_1' bestehende Projectivität eine parabolische ist, indem die Doppelpunkte derselben (welche die Lösungen unseres Problems lieferten) in dem Treffpunkte jener Transversale vereinigt liegen.

Besitzen die Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 zwei gemeinschaftliche Transversalen, so haben wir in den Treffpunkten derselben auf g_1 zwei Doppelelemente für die parabolische Projectivität, zwischen den Punkten X_1 und X_1'; daraus folgt, dass jeder Punkt X_1 von g_1 mit dem ihm entsprechenden X_1' zusammenfällt, so dass jeder Punkt von g_1 der Eckpunkt für ein Fünfeck ist, das den Bedingungen unserer Aufgabe entspricht.

Wir haben das Resultat:

Es gibt im allgemeinen zwei einfache Fünfecke, die so beschaffen sind, dass nicht nur ihre Eckpunkte der Reihe nach auf den fünf beliebig vorgelegten Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 liegen, sondern auch die Gegenseiten dieser Eckpunkte der Reihe nach die fünf Geraden schneiden. Besitzen die fünf Geraden eine gemeinschaftliche Transversale, so gibt es im allgemeinen kein Fünfeck von der angegebenen Beschaffenheit. Haben jedoch die fünf Geraden zwei gemeinschaftliche Transversalen, so gibt es unzählig viele solche Fünfecke und jeder Punkt auf einer der fünf Geraden ist Eckpunkt für eines unter ihnen.

Fünf beliebige Erzeugende einer Regelfläche dritter Ordnung haben in den beiden Leitlinien der Regelfläche immer zwei gemeinsame Transversalen; wir können dem zu Beginn dieses Paragraphen abgeleiteten Satz die folgende Form geben:

Es gibt ∞^6 einfache Fünfecke von der Beschaffenheit, dass nicht nur die fünf Eckpunkte der Reihe nach auf fünf Erzeugenden einer Regelfläche dritter Ordnung liegen, sondern auch die

Gegenseiten der Eckpunkte diese Erzeugenden der Reihe nach treffen. Jeder Kegel zweiter Ordnung, welcher auf der Regelfläche seinen Scheitel hat und die Seiten irgend eines dieser ∞^6 Fünfecke berührt, berührt auch die Doppellinie der Regelfläche.

II.

Es seien vier windschiefe Geraden vorgelegt a_1, a_2, l, d, ferner eine Gerade b, welche a_1 und a_2 und eine Gerade c, welche a_1, a_2 und l trifft.

Die durch die sechs Geraden a_1, a_2, b, c, l, d bestimmte Fläche F_8 des allgemeinen Falles zerfällt in die fünf Ebenen $a_1 b$, $a_2 b$, $a_1 c$, $a_2 c$, $l c$ und eine Fläche dritter Ordnung F_3. Diese Fläche dritter Ordnung ist eine Regelfläche, denn die Gerade d, welche in keiner der fünf Ebenen liegt, aber nach § 1 für F_8 eine Doppelgerade ist, muss eine Doppellinie von F_3 sein. Die Fläche F_3 enthält auch die Gerade l, da diese dem in F_8 enthaltenen Obenenort nur einfach angehört.

Auf der Fläche F_3 liegen auch die beiden Transversalen t_1, t_2, welche die vier Geraden a_1, a_2, l, d besitzen, ferner die beiden Transversalen g_1 und g_2, welche von den Punkten $a_1 b$ und $a_2 b$ an das Geradenpaar l, d gehen, und endlich die Transversale h vom Punkte $l c$ an das Geradenpaar b, d. Diese Geraden liegen auf der Fläche F_3, weil sie vier von den sechs Geraden a_1, a_2, b, c, l, d treffen, ohne in eine in F_8 enthaltene Ebene zu fallen.

Für die Regelfläche F_3 haben wir also: die doppelte Leitlinie d, die einfache Leitlinie l und die fünf geradlinige Erzeugende t_1, t_2, g_1, g_2, h, wodurch diese Fläche vollständig bestimmt ist, ein Umstand, der uns gestattet, als Resultat unserer Untersuchung den folgenden Satz auszusprechen:

Sind a_1, a_2 zwei Strahlen, welche dieselben zwei geradlinigen Erzeugenden einer cubischen Regelfläche treffen und b die Verbindungslinie ihrer dritten Schnittpunkte mit der Fläche: dann berühren alle ∞^1 Kegel zweiter Ordnung, welche in einem Flächenpunkte ihren Scheitel haben und neben den Geraden a_1, a_2, b auch noch die beiden Leitlinien der Regelfläche tangieren, sämmtlich noch eine und dieselbe sechste Gerade c. Diese Gerade ist die Transversale, die man von demjenigen Punkte an das Geradenpaar a_1 a_2 legen kann, in welchem die durch den dritten Schnittpunkt der Geraden b gehende Erzeugende h der Fläche die einfache Leitlinie trifft.

§ 6. Die Kegelfläche.

Es sei ein windschiefes Viereck vorgelegt; g_1, g_2 seien zwei Gegenseiten desselben, l_1, l_2 die beiden anderen und es seien außerdem zwei beliebige sich im Punkte s schneidende Geraden g', l' gegeben.

Die durch die sechs Geraden $g_1, g_2, l_1, l_2, g', l'$, bestimmte Fläche F_8 besteht aus den fünf Ebenen $g_1 l_1$, $g_1 l_2$, $g_2 l_1$, $g_2 l_2$, $g' l'$ und einer Fläche dritter Ordnung F_3, für welche wir nach den Sätzen des § 1 sechs durch den Punkt s hindurchgehende l gerade Linien kennen: die beiden Geraden g' l' und die vier Strahlen, welche den Punkt s mit den Ecken des von den Geraden g_1, l_1, g_2, l_2 gebildeten Vierecks verbinden. Die beiden ersten von den sechs Geraden liegen auf der Fläche F_3, weil sie Doppelgeraden der Fläche F_8 sind, aber nur in einer der in F_8 enthaltenen Ebenen sich befinden; die vier übrigen liegen auf F_3, weil sie in keine dieser fünf Ebenen fallen und vier von den sechs Geraden g_1, g_2, l_1, l_2, g', l' treffen.

Wir schließen, dass die Fläche F_3 ein Kegel ist, der seinen Scheitel im Punkte s hat. Denn der Punkt s ist ein dreifacher Punkt der Fläche, weil durch ihn sechs Geraden der Fläche hindurchgehen, welche nicht auf demselben Kegel zweiten Grades liegen werden.

Nach § 1 geht die Fläche F_8 durch die Curve hindurch, in welcher ein Hyperboloid, das drei von den die Fläche bestimmenden sechs Geraden enthält, von dem Hyperboloid getroffen wird, das die drei übrigen enthält.

Hiernach ist die Kegelfläche F_3 völlig bestimmt. F_3 ist der Kegel, durch welchen die Raumcurve C^4 vierter Ordnung erster Art, in welcher das Hyperboloid der drei Geraden g_1, g_2, g' vom Hyperboloid der drei Geraden l_1, l_2, l' getroffen wird, vom Curvenpunkte s aus projiciert wird. Derselbe Kegel projiciert auch die Schnittcurve der durch die Geradentripel g_1, g_2, l' und l_1, l_2, g' gehenden Hyperboloide.

Auf der Curve C^4 haben wir in den Eckpunkten des von den Geraden g_1, l_1, g_2, l_2 gebildeten Vierecks die Ecken für ein Viereck, dessen Seiten abwechselnd zwei bestimmten durch die Curve hindurchgelegten Hyperboloiden entnommen sind, es gibt dann nach einem bekannten Satze unendlich viele solche Vierecke und jeder Punkt der Curve ist Eckpunkt für eines derselben. Ohne an der Fläche F_3 etwas zu ändern, kann man an Stelle der Geradenpaare g_1, g_2, l_1, l_2 der obigen Betrachtung die beiden Gegenseitenpaare irgend eines dieser Vierecke setzen und hat also den Satz:

Sind einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art unendlich viele Vierecke eingeschrieben, deren

Seiten abwechselnd zwei durch die Curve hindurchgelegten Hyperboloiden als Erzeugende angehören, so werden von jedem Punkt des Kegels aus, der die Curve aus einem beliebigen ihrer Punkte s projiciert, die beiden durch s gehenden Seiten des Vierecks, das in s einen Eckpunkt hat, in Verbindung mit den vier Seiten irgend eines anderen von unseren Vierecken als sechs Tangenten desselben Kegelschnittes gesehen.

Ein Kegel dritter Ordnung enthält ∞^5 Raumcurven vierter Ordnung erster Art; auf jeder solchen Curve gibt es ∞^1 Systeme von ∞^1 Vierecken, deren Seiten abwechselnd die Erzeugenden zweier durch die Curve gehender Hyperboloide sind, so dass wir vermöge des eben ausgesprochenen Satzes zu ∞^7 Sextupeln von Geraden gelangen, die von jedem Punkte des Kegels als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden. Dies stimmt mit der Abzählung in § 1.