Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.

Von

Hermann Weyl in Göttingen.

§ 1.

Formulierung des Problems.

Es sei

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ \cdots$$

eine Reihe von Funktionen, deren jede im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ erklärt und samt ihrem Quadrat im Lebesgue'schen Sinne integrierbar (sommable) ist. Wir nehmen an, daß dieselben ein *System von Orthogonalfunktionen* bilden, d. h. für alle Indizes m, n die Relationen

$$\int_0^1 (\Phi_m(x))^2\,dx = 1, \qquad \int_0^1 \Phi_m(x)\,\Phi_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

bestehen, wobei die Integrale, wie im folgenden stets, im Sinne der Lebesgue'schen Definition*) zu nehmen sind. Wir fragen dann, welchen Bedingungen die Koeffizienten $c_1, c_2, \cdots$ genügen müssen, damit die Reihe

$$c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots$$

in einem sogleich näher festzusetzenden Sinne konvergiert.

Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$ irgendwelche für $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktionen, so sage ich, die Reihe

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots \tag{1}$$

konvergiere *wesentlich-gleichmäßig*, wenn zu jeder positiven Zahl $\varepsilon < 1$ eine im Intervall $0 \cdots 1$ gelegene Menge $\mathfrak{A}_\varepsilon$ vom Maße (mesure) $1-\varepsilon$ gefunden werden kann, so daß die Reihe (1) für alle zu $\mathfrak{A}_\varepsilon$ gehörigen Werte x gleichmäßig konvergiert.

*) Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Paris 1904), pag. 112 ff.

Unter der durch eine wesentlich-gleichmäßig konvergente Reihe (1) *dargestellten Funktion* verstehe ich diejenige Funktion $u(x)$, die an den Stellen der Konvergenz von (1) durch

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots,$$

an den Divergenzstellen aber (die eine Menge vom Maße 0 bilden) durch

$$u(x) = 0$$

erklärt ist. Sind die sämtlichen Glieder $u_n(x)$ meßbare Funktionen (fonctions mesurables*)), so gilt das Gleiche von der dargestellten Funktion $u(x)$.

Das Theorem, das in der vorliegenden Arbeit bewiesen werden soll, spricht sich nun so aus:

Theorem. *Ist $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \cdots$ ein System orthogonaler Funktionen, so konvergiert die Reihe*

$$c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots \tag{2}$$

wesentlich-gleichmäßig, wenn die Summe

$$c_1^2\sqrt{1} + c_2^2\sqrt{2} + c_3^2\sqrt{3} + \cdots$$

existiert.

Nehmen wir einen Augenblick diesen Satz als bereits bewiesen an. Bedeutet dann $f(x)$ die durch (2) dargestellte Funktion, so will ich zeigen, *daß $f(x)$ und $(f(x))^2$ integrierbar sind.* In methodischer Hinsicht mag bemerkt werden, daß wir dabei ebenso wie beim Beweis des Haupttheorems von dem Riesz-Fischer'schen Satz**) keinen Gebrauch machen wollen.

Ist $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ eine abnehmende, gegen 0 konvergierende Reihe von Zahlen, so können wir im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ enthaltene Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots$ vom Maße $1 - \varepsilon_1$, bezw. $1 - \varepsilon_2, \cdots$ bestimmen, von denen jede folgende die vorhergehende enthält und die von solcher Beschaffenheit sind, daß die Reihe (2) in jeder der Mengen $\mathfrak{A}_n$ gleichmäßig konvergiert. Ist

$$f_\nu = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_\nu\Phi_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

gesetzt, so wird für alle n und ν

$$\int\limits_{(\mathfrak{A}_n)} f_\nu^{\,2}\,dx \leqq c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + \cdots,$$

---

*) Lebesgue, l. c. pag. 110.

**) Riesz, Gött. Nachr. (Math.-phys. Klasse) 1907, pag. 116. Fischer, Comptes Rendus 1907, Bd. 144, pag. 1022.

und da f_ν^2 mit wachsendem ν gleichmäßig in $\mathfrak{A}_n$ gegen f^2 konvergiert, muß also f^2 in $\mathfrak{A}_n$ integrierbar und

$$\int_{(\mathfrak{A}_n)} f^2\,dx \leqq c_1^2 + c_2^2 + \cdots$$

sein. Dies wiederum zeigt, daß das Integral $\int_0^1 f^2\,dx$, und weil $f(x)$ gewiß meßbar ist, auch $\int_0^1 f\,dx$ existiert.

Aus der Beziehung

$$\int_{(\mathfrak{A}_n)} (f - f_m)^2\,dx = \underset{\nu=\infty}{L} \int_{(\mathfrak{A}_n)} (f_\nu - f_m)^2\,dx \leqq c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + \cdots,$$

ergibt sich durch den Grenzübergang zu $n = \infty$

$$\int_0^1 (f - f_m)^2\,dx \leqq c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + \cdots,$$

daraus aber

$$\underset{m=\infty}{L} \int_0^1 (f - f_m)^2\,dx = 0. \tag{3}$$

Mithin gilt für ein festes i

$$\underset{m=\infty}{L} \int_0^1 (f - f_m)\,\Phi_i\,dx = 0,$$

d. i.

$$\int_0^1 f\,\Phi_i\,dx = c_i \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Unter Berücksichtigung dieses Umstandes nimmt die Limesgleichung (3) die Gestalt an

$$\underset{m=\infty}{L} \left[\int_0^1 f^2\,dx - c_1^2 - c_2^2 - \cdots - c_m^2\right] = 0.$$

Zusatz 1: *Unter den Voraussetzungen des Theorems gelten für die durch die Reihe* $c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots$ *dargestellte Funktion* $f(x)$, *die samt ihrem Quadrat integrierbar ist, die Relationen*

$$\int_0^1 f(x)\,\Phi_n(x)\,dx = c_n,$$

$$\int_0^1 (f(x))^2\,dx = c_1^2 + c_2^2 + \cdots.$$

Ein Orthogonalsystem $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\cdots$ heißt *vollständig*, wenn für jede absolut und quadratisch integrierbare Funktion $g(x)$ die „Vollständigkeitsrelation“*)

$$\int_0^1 g^2 dx = \left(\int_0^1 g\Phi_1\, dx\right)^2 + \left(\int_0^1 g\Phi_2\, dx\right)^2 + \cdots$$

Geltung besitzt.

Zusatz 2: *Ist* $\Phi_1, \Phi_2, \cdots$ *ein vollständiges Orthogonalsystem,* $f(x)$ *eine samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion, für welche die Summe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f\Phi_n\, dx\right)^2 \sqrt{n}$$

existiert, so bilden diejenigen Werte x*, für welche die durch*

$$\int_0^1 f\Phi_1\, dx \cdot \Phi_1(x) + \int_0^1 f\Phi_2\, dx \cdot \Phi_2(x) + \cdots \tag{4}$$

dargestellte Funktion nicht mit $f(x)$ *übereinstimmt, höchstens eine Menge vom Maße* 0.

In der Tat stellt (4) nach Zusatz 1 eine samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion $g(x)$ dar, welche die Eigenschaften

$$\int_0^1 g\,\Phi_n\, dx = \int_0^1 f\,\Phi_n\, dx \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

besitzt. Wenden wir daher die Vollständigkeitsrelation auf $f-g$ an, so folgt die zu beweisende Gleichung

$$\int_0^1 (f-g)^2\, dx = 0.$$

Für das spezielle Orthogonalsystem

$$\Phi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$$

hat Fatou den Satz ausgesprochen**), daß die Reihe $\sum c_n \sin n\pi x$ konvergiert, außer für Werte x einer gewissen Menge vom Maße 0, falls

$$\underset{n=\infty}{L}\, n c_n = 0$$

ist. In den nachgelassenen Papieren des Herrn F. Jerosch fand sich eine

*) Vergl. Hilbert, Gött. Nachr. 1906, pag. 442.

**) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. Bd. 30 (1906), pag. 337.

Untersuchung, welche die Fatou'sche Bedingung durch die schärfere ersetzte, daß eine Zahl C und ein Exponent

$$\gamma > \frac{\sqrt{17}-1}{4} = 0{,}7807 \cdots$$

existieren, so daß $|c_n| \leqq \frac{C}{n^\gamma}$ für alle n wird. Diese Jerosch'sche Arbeit habe ich in den Mathematischen Annalen Bd. 66 herausgegeben und dabei durch eine geringe Modifikation des von Herrn Jerosch eingeschlagenen Verfahrens die untere Grenze $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ des Exponenten γ auf $\frac{2}{3}$ herabgedrückt. Auch ergab sich unmittelbar die Bemerkung, daß unter dieser Voraussetzung die Konvergenz von $\sum c_n \sin n\pi x$ eine wesentlich-gleichmäßige ist. Dieses Resultat werde ich in § 6 der vorliegenden Arbeit, die aus einer Weiterbildung der Jerosch'schen Ideen hervorgegangen ist, von neuem in verschärfter Fassung beweisen.

§ 2.

Ein grundlegender Hilfssatz.

Es sei

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots \tag{5}$$

irgend eine unendliche Reihe von Funktionen, die im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definiert sind. Ist n einer der Indizes $1, 2, 3, \cdots$, so bezeichne ich für jeden Wert von x mit $\widetilde{f_n}(x)$ die größte unter den Zahlen*)

$$|f_1(x)|,\quad |f_2(x)|,\ \cdots,\ |f_n(x)|$$

und nenne

$$\widetilde{f_1}(x),\ \widetilde{f_2}(x),\ \cdots$$

die zu (5) gehörige (absolute) *Majorantenreihe*. Es gilt dann

$$|f_m(x)| \leqq \widetilde{f_n}(x) \quad \text{für} \quad m \leqq n$$

und

$$0 \leqq \widetilde{f_1}(x) \leqq \widetilde{f_2}(x) \leqq \cdots. \tag{6}$$

Ferner bedeute $\sigma(l)$ eine für $l \geqq 0$ definierte, nirgends abnehmende Funktion, die für $l > 0$ positiv ist, und für alle n sei $f_n(x)$ meßbar und $\sigma(|f_n(x)|)$ im Lebesgue'schen Sinne integrierbar. Man erkennt leicht, daß alsdann auch

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n}(x))\, dx = J_n$$

existiert und

$$0 \leqq J_1 \leqq J_2 \leqq \cdots$$

*) Vergl. die zitierte Annalenarbeit von Jerosch, pag. 68.

ist. Daher konvergiert J_n mit wachsendem n entweder gegen eine bestimmte endliche Grenze J, oder es ist $\underset{n=\infty}{L} J_n = \infty$. Wir setzen voraus, daß der erste Fall vorliege. Dann gilt der

Hilfssatz: Ist l eine positive Zahl, so bilden diejenigen Werte x, für welche die sämtlichen Ungleichungen

$$|f_n(x)| \leqq l \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

erfüllt sind, eine Menge, deren Maß mindestens $1 - \frac{J}{\sigma(l)}$ beträgt.

Bezeichnet $\mathfrak{E}_n$ die Menge der Punkte x, in denen $\widetilde{f}_n(x) > l$ ist, so ist $\mathfrak{E}_n$ unseren Voraussetzungen gemäß meßbar, und es gilt

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f}_n)\, dx \geqq \int_{(\mathfrak{E}_n)} \sigma(\widetilde{f}_n)\, dx \geqq \sigma(l) \cdot m(\mathfrak{E}_n),$$

wenn das Zeichen $m(\mathfrak{E}_n)$ das Maß der Punktmenge $\mathfrak{E}_n$ bedeutet, mithin

$$m(\mathfrak{E}_n) \leqq \frac{J}{\sigma(l)}.$$

Wegen der Ungleichungen (6) ist aber $\mathfrak{E}_1$ enthalten in $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_2$ enthalten in $\mathfrak{E}_3$ u. s. f., und daher schließlich alle $\mathfrak{E}_n$ enthalten in einer Menge

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \cdots = \underset{n=\infty}{L} \mathfrak{E}_n,$$

die gleichfalls höchstens das Maß $\frac{J}{\sigma(l)}$ besitzt. Für jeden Punkt x der Komplementärmenge $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ gelten die sämtlichen Ungleichungen

$$\widetilde{f}_n(x) \leqq l \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

§ 3.

Ein Kriterium für die wesentlich-gleichmäßige Konvergenz.

Wir spezialisieren das Resultat des vorigen Paragraphen, indem wir unter $\sigma(l)$ von jetzt ab die folgende Funktion verstehen:

$$\begin{aligned} \sigma(l) &= l^2 \quad \text{für} \quad 0 \leqq l < 1, \\ &= 1 \quad \text{für} \quad 1 \leqq l. \end{aligned}$$

Alsdann ist $\sigma(|f(x)|)$ integrierbar, sobald $f(x)$ als meßbar vorausgesetzt wird, und es bleibt stets

$$\int_0^1 \sigma(|f(x)|)\, dx \leqq 1.$$

Bezeichnet

$$\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \cdots$$

eine unendliche Reihe meßbarer, für $0 \leqq x \leqq 1$ definierter Funktionen, so kann man daher eine *Funktion*

$$J(z) = J(z_1, z_2, z_3, \cdots)$$

der unendlich vielen Variablen $z_1, z_2, z_3, \cdots$ definieren durch die Gleichung

$$J(z) = \underset{n=\infty}{L} \int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n}(x))\, dx,$$

wobei

$$\widetilde{f_1}(x), \widetilde{f_2}(x), \widetilde{f_3}(x), \cdots$$

die absolute Majorantenreihe von

$$\begin{aligned} f_1(x) &= z_1 \lambda_1(x), \\ f_2(x) &= z_1 \lambda_1(x) + z_2 \lambda_2(x), \\ f_3(x) &= z_1 \lambda_1(x) + z_2 \lambda_2(x) + z_3 \lambda_3(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

bedeutet. Es wird offenbar

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\, dx = J(z_1, z_2, \cdots, z_n, 0, 0, \cdots) \equiv [J(z)]_n,$$

d. h. $\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\, dx$ ist in der von Hilbert eingeführten Terminologie*) gleich dem n^{ten} *Abschnitt* der Funktion $J(z)$, und diese Funktion hat demnach die durch die Gleichung

$$J(z) = \underset{n=\infty}{L} [J(z)]_n$$

ausgesprochene Eigenschaft.

Satz: *Damit die Reihe*

$$c_1 \lambda_1(x) + c_2 \lambda_2(x) + c_3 \lambda_3(x) + \cdots \tag{7}$$

wesentlich-gleichmäßig konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\underset{m=\infty}{L} J(0, 0, \cdots, 0, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots) = 0$$

ist.

Dabei wird unter $J(0, \cdots, 0, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots)$ der Wert der Funktion $J(z)$ für das folgende Argumentsystem verstanden:

$$z_1 = c_1^{(m)} = 0, \quad z_2 = c_2^{(m)} = 0, \cdots, z_m = c_m^{(m)} = 0;$$
$$z_{m+1} = c_{m+1}^{(m)} = c_{m+1}, \quad z_{m+2} = c_{m+2}^{(m)} = c_{m+2}, \cdots.$$

Der Einfachheit halber setzen wir

$$J(c^{(m)}) = J^{(m)},$$

*) Hilbert, Gött. Nachr. 1906, pag. 159 u. 440.

ferner

$$f_n^{(m)}(x) = c_1^{(m)}\lambda_1(x) + \cdots + c_n^{(m)}\lambda_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

so daß

$$J^{(m)} = \underset{n=\infty}{L} \int_0^1 \sigma\left(\widetilde{f_n^{(m)}}(x)\right) dx$$

und

$$f_n^{(m)}(x) = 0 \quad \text{für} \quad n \leqq m,$$
$$= f_n^{(0)}(x) - f_m^{(0)}(x) \quad \text{für} \quad n > m$$

ist.

Konvergiert (7) wesentlich-gleichmäßig, so bestimme man zu der positiven Zahl $\varepsilon < 1$ die Menge $\mathfrak{A}_\varepsilon$ vom Maße $1 - \varepsilon$ so, daß in $\mathfrak{A}_\varepsilon$

$$c_1\lambda_1(x) + c_2\lambda_2(x) + \cdots$$

gleichmäßig konvergiert; darauf kann der Index N derart gewählt werden, daß für Werte x in $\mathfrak{A}_\varepsilon$ und für $n > m \geqq N$

$$\left|f_n^{(0)}(x) - f_m^{(0)}(x)\right| \leqq \sqrt{\varepsilon}$$

ist. Dann gelten in $\mathfrak{A}_\varepsilon$ auch die sämtlichen Ungleichungen

$$\widetilde{f_n^{(m)}}(x) \leqq \sqrt{\varepsilon} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \qquad m \geqq N,$$

und daher

$$\int\limits_{(\mathfrak{A}_\varepsilon)} \sigma\left(\widetilde{f_n^{(m)}}(x)\right) dx \leqq \sigma(\sqrt{\varepsilon}) = \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \cdots \\ m \geqq N \end{pmatrix}.$$

Andererseits besitzt die Komplementärmenge $\mathfrak{B}_\varepsilon$ von $\mathfrak{A}_\varepsilon$ das Maß ε; mithin ist

$$\int\limits_{(\mathfrak{B}_\varepsilon)} \sigma\left(\widetilde{f_n^{(m)}}(x)\right) dx \leqq \varepsilon.$$

Durch Addition und Grenzübergang schließen wir

$$J^{(m)} \leqq 2\varepsilon \quad \text{für} \quad m \geqq N,$$

also

$$\underset{m=\infty}{L} J^{(m)} = 0. \tag{8}$$

Umgekehrt folgt aus (8) die wesentlich-gleichmäßige Konvergenz von (7). Um dies einzusehen, sei

$$l_1, l_2, l_3, \cdots$$

eine gegen 0 konvergierende Reihe von Zahlen, die sämtlich < 1 sind,

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots$$

eine aus positiven Gliedern bestehende konvergente Reihe. Da wir annehmen, daß (8) erfüllt ist, gibt es zu jedem h einen Index μ_h, so daß

$$J^{(\mu_h)} \leqq l_h^2 \, \delta_h$$

wird; wir verstehen unter μ_h etwa die kleinste ganze positive Zahl, für die diese Ungleichung besteht. Wenden wir dann den Hilfssatz von § 2 an, so erkennen wir, daß die Menge $\mathfrak{A}_h$ derjenigen Punkte x, für die

$$\left| f_n^{(\mu_h)}(x) \right| \leqq l_h \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

ist, mindestens das Maß

$$1 - \frac{J^{(\mu_h)}}{\sigma(l_h)} \geqq 1 - \delta_h$$

besitzt. Im Bereich $\mathfrak{A}_h$ gilt

$$|f_n^{(0)}(x) - f_m^{(0)}(x)| \leqq 2 l_h \quad \text{für} \quad n, m \geqq \mu_h.$$

Der Durchschnitt $\mathfrak{A}_h^*$ der Mengen $\mathfrak{A}_h$, $\mathfrak{A}_{h+1}$, $\mathfrak{A}_{h+2}$, $\cdots$ hat mindestens das Maß $1 - \pi_h$, wenn

$$\pi_h = \delta_h + \delta_{h+1} + \delta_{h+2} + \cdots$$

gesetzt wird, und es gelten in $\mathfrak{A}_h^*$ die Beziehungen

$$|f_n^{(0)}(x) - f_m^{(0)}(x)| \leqq 2 l_j, \quad \text{falls} \quad n, m \geqq \mu_j$$
$$(\text{für } j = h, h+1, h+2, \cdots).$$

Folglich konvergiert die Reihe (7) gleichmäßig für alle Werte x der Menge $\mathfrak{A}_h^*$. Damit ist der Beweis unseres Satzes vollendet.

§ 4.

Beweis des Haupttheorems.

Für jedes Wertesystem $z_1, z_2, z_3, \cdots$ hat die Funktion

$$Q(z) = z_1^2 \sqrt{1} + z_2^2 \sqrt{2} + z_3^2 \sqrt{3} + \cdots$$

entweder einen bestimmten endlichen Wert oder ist ∞.

Hilfssatz: Ist $\lambda_m(x)$ $(m = 1, 2, \cdots)$ insbesondere ein System orthogonaler Funktionen, so gilt identisch in den Variablen $z_1, z_2, \cdots$ die Ungleichung

$$J(z) \leqq \sqrt{30\, Q(z)}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir $\int\limits_0^1 \sigma(\widetilde{f}_n(x))\, dx$ berechnen. Bilden die $\lambda_m(x)$ ein Orthogonalsystem, so schreiben wir, der Übereinstimmung mit den in § 1 benutzten Bezeichnungen halber,

$$\lambda_m(x) = \Phi_m(x).$$

Ferner sei H eine positive Zahl, deren genauere Bestimmung wir uns noch vorbehalten, und

$$n_{2i-1} = i^2 + i - 1, \qquad n_{2i} = i^2 + 2i \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Dann ist $n_1 = 1$, und es gilt für alle geraden und ungeraden Indizes k

$$\text{(9)} \qquad \begin{gathered} \sqrt{n_k} < n_{k+1} - n_k \leqq 1 + \sqrt{n_k}, \\ k < 2\sqrt{n_k}. \end{gathered}$$

Ferner bedeute p die größte ganze Zahl, für die noch $n_p \leqq n$ ist, und es werde

$$\delta_m(x) = f_n(x) - f_m(x) \qquad (m = 1, 2, \cdots, n)$$

gesetzt. Zu jedem Wert von x findet sich unter den Indizes $m \leqq n$ mindestens einer, für welchen

$$|f_m(x)| = \widetilde{f}_n(x)$$

wird: der kleinste unter diesen werde mit $(n; x)$ bezeichnet, so daß

$$|f_{(n;x)}(x)| = \widetilde{f}_n(x)$$

ist. Endlich soll $\mathfrak{D}_k$ die Menge der Zahlen x bezeichnen, für die

$$n_k \leqq (n; x) < n_{k+1}, \qquad |\delta_{n_k}(x)| > H$$

ist, während zu der Menge $\mathfrak{E}_k$ alle x zusammengefaßt werden, welche die Beziehungen

$$n_k \leqq (n; x) < n_{k+1}, \qquad |\delta_{n_k}(x)| \leqq H$$

erfüllen.*) Die $2p$ Mengen $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_p$; $\mathfrak{E}_1, \cdots, \mathfrak{E}_p$ sind meßbar und machen zusammen das gesamte Intervall $0 \cdots 1$ aus, so daß

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f}_n)\, dx = \int_{(\mathfrak{D}_1)} + \cdots + \int_{(\mathfrak{D}_p)} + \int_{(\mathfrak{E}_1)} + \cdots + \int_{(\mathfrak{E}_p)}$$

wird, wobei unter dem Zeichen $\int$ als Integrand jedesmal $\sigma(\widetilde{f}_n)\, dx$ zu ergänzen ist. Da

$$\int_0^1 (\delta_{n_k}(x))^2\, dx = z^2_{n_k+1} + z^2_{n_k+2} + \cdots + z^2_n$$
$$\{= 0, \quad \text{falls } k = p,\ n_p = n\}$$

ist, muß

$$m(\mathfrak{D}_k) \leqq \frac{1}{H^2} \sum_{n_k+1}^{n} z^2_m$$

*) Vergl. Jerosch, l. c., pag. 71.

sein, folglich

$$\int\limits_{(\mathfrak{D}_1)} + \cdots + \int\limits_{(\mathfrak{D}_p)} \leqq \frac{1}{H^2} \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=n_k+1}^{n} z_m^2 = \frac{1}{H^2} \sum_{k=1}^{p} \left(k \sum_{i=n_k+1}^{[n_{k+1}, n]} z_i^2 \right);$$

dabei bedeutet $[n_{k+1}, n]$ die kleinere der beiden Zahlen n_{k+1}, n. Es ist aber, wie aus (9) folgt,

$$\sum_{k=1}^{p} \left(k \sum_{i=n_k+1}^{[n_{k+1}, n]} z_i^2 \right) \leqq 2 \sum_{k=1}^{p} \left(\sqrt{n_k} \sum_{n_k+1}^{[n_{k+1}, n]} z_i^2 \right) \leqq 2 \sum_{m=1}^{n} \sqrt{m}\, z_m^2 = 2[Q(z)]_n. \tag{10}$$

Durch Einsetzen in die vorige Ungleichung ergibt sich also

$$\int\limits_{(\mathfrak{D}_1)} + \cdots + \int\limits_{(\mathfrak{D}_p)} \leqq \frac{2}{H^2} [Q(z)]_n. \tag{11}$$

Ferner gilt für jeden Punkt x von $\mathfrak{E}_k$

$$\begin{aligned} f_{(n;x)}(x) &= f_{n_k}(x) + z_{n_k+1}\Phi_{n_k+1}(x) + \cdots + z_{(n;x)}\Phi_{(n;x)}(x) \\ &= f_n(x) - \delta_{n_k}(x) + z_{n_k+1}\Phi_{n_k+1}(x) + \cdots + z_{(n;x)}\Phi_{(n;x)}(x), \end{aligned}$$

mithin

$$(\widetilde{f}_n(x))^2 \leqq 2H^2 + 4(f_n(x))^2 + 4 \cdot \sum_{i=n_k+1}^{[n_{k+1}-1, n]} z_i^2 \cdot \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}-1} (\Phi_j(x))^2.$$

So findet man

$$\int\limits_{(\mathfrak{E}_k)} (\widetilde{f}_n(x))^2\, dx \leqq 2H^2 m(\mathfrak{E}_k) + 4 \int\limits_{(\mathfrak{E}_k)} (f_n(x))^2\, dx + 4(n_{k+1} - n_k - 1) \sum_{n_k+1}^{[n_{k+1}, n]} z_i^2.$$

Da aber

$$\int\limits_{(\mathfrak{E}_k)} \sigma(\widetilde{f}_n)\, dx \leqq \int\limits_{(\mathfrak{E}_k)} (\widetilde{f}_n)^2\, dx$$

ist, ergibt sich hieraus

$$\int\limits_{(\mathfrak{E}_1)} + \cdots + \int\limits_{(\mathfrak{E}_p)} \leqq 2H^2 + 4 \int_0^1 (f_n(x))^2\, dx + 4 \sum_{k=1}^{p} \left(\sqrt{n_k} \sum_{n_k+1}^{[n_{k+1}, n]} z_i^2 \right)$$

und, wegen

$$\int_0^1 f_n^2\, dx = z_1^2 + \cdots + z_n^2 \leqq [Q(z)]_n$$

und der Ungleichung (10),

$$\int\limits_{(\mathfrak{E}_1)} + \cdots + \int\limits_{(\mathfrak{E}_p)} \leqq 2H^2 + 8[Q(z)]_n.$$

Addieren wir dies zu (11) hinzu, so erhalten wir

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\,dx \leqq 2\left(H^2 + \frac{[Q(z)]_n}{H^2}\right) + 8[Q(z)]_n.$$

Wählen wir nunmehr, um die gewonnene obere Grenze möglichst klein zu machen,

$$H = \sqrt[4]{[Q(z)]_n},$$

so folgt

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\,dx \leqq \sqrt{[Q(z)]_n}\cdot\{4 + 8\sqrt{[Q(z)]_n}\}.$$

Außerdem ist

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\,dx \leqq 1.$$

Bedeutet daher Q_0 diejenige Zahl, für welche

$$4\sqrt{Q_0} + 8\,Q_0 = 1$$

ist, so gilt

1) wenn $[Q(z)]_n \geqq Q_0$: $\displaystyle\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\,dx \leqq 1 \leqq \sqrt{\frac{[Q(z)]_n}{Q_0}}$,

2) wenn $[Q(z)]_n < Q_0$: $\displaystyle\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\,dx \leqq \sqrt{[Q(z)]_n}\,\{4 + 8\sqrt{Q_0}\} = \sqrt{\frac{[Q(z)]_n}{Q_0}}$,

also allgemein, da die Rechnung

$$\frac{1}{Q_0} = 8\,(2 + \sqrt{3}) \leqq 16 + 8\cdot\frac{7}{4} = 30$$

ergibt,

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\,dx \leqq \sqrt{30\,[Q(z)]_n}.$$

Diese Ungleichung läßt sich in der Form schreiben

$$[J(z)]_n \leqq \sqrt{30\,[Q(z)]_n}$$

und liefert durch den Grenzübergang zu $n = \infty$ den zu beweisenden Hilfssatz.

Ist nun $c_1, c_2, \cdots$ eine Zahlenreihe, für welche $Q(c)$ konvergiert, so ist

$$\underset{m=\infty}{L}\, Q(0, \cdots, 0, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots) = 0,$$

mithin auch

$$\underset{m=\infty}{L}\, J(0, \cdots, 0, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots) = 0,$$

und nach dem in § 3 hergeleiteten Kriterium ist damit das in § 1 ausgesprochene Haupttheorem bewiesen.

§ 5.

Über konvergente Reihen mit positiven Gliedern.

Der Fall der trigonometrischen Reihen verdient eine besondere Behandlung, da sich in ihm die erhaltene Konvergenzbedingung noch erheblich verschärfen läßt. Wir benutzen dabei den folgenden Satz, der auch an sich, wie mir scheint, einiges Interesse darbietet.

Hilfssatz: Ist $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ eine Zahlenfolge, für die

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n}}{a_{n+1} - a_n} = A$$

konvergiert, so bleibt der Quotient $\frac{n}{\sqrt[3]{a_n}}$ für alle n unterhalb der größeren der beiden Zahlen $\frac{1}{\sqrt[3]{a_1}}$, $\sqrt{7A}$, und es ist außerdem

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{n}{\sqrt[3]{a_n}} = 0.$$

Beweis: Bezeichnen wir die größere der beiden Zahlen $\frac{1}{\sqrt[3]{a_1}}$, $\sqrt{7A}$ mit B, so ist die Ungleichung

$$m \leqq B\sqrt[3]{a_m} \tag{12}$$

für $m = 1$ richtig. Nehmen wir an, sie treffe für $m = 1, 2, \cdots, n$ zu: wir zeigen dann, daß sie auch für $m = n + 1$ Gültigkeit behält.

In der Tat folgt aus der gemachten Annahme

$$A \geqq \sum_{m=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{a_m}}{a_{m+1} - a_m} \geqq \frac{1}{B} \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{a_{m+1} - a_m} \tag{13}$$

Setzen wir in der für reelle Zahlen $u_m, v_m\,(m = 1, 2, \cdots, n)$ gültigen, sog. Schwarz'schen Ungleichung

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)^2 \leqq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)\,(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n)$$

$$u_m = \sqrt{\frac{m}{a_{m+1} - a_m}}, \quad v_m = \sqrt{m(a_{m+1} - a_m)},$$

so ergibt sich

$$(-a_1 - \cdots - a_n + n a_{n+1}) \cdot \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{a_{m+1} - a_m} \geqq \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Führen wir diese Abschätzung in (13) ein, so kommt

$$n a_{n+1} - a_1 - \cdots - a_n \geqq \frac{n^2(n+1)^2}{4AB}$$

Außerdem ist

$$a_1 + \cdots + a_n \geqq \frac{1}{B^3}(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4B^3},$$

mithin

$$a_{n+1} \geqq \frac{n(n+1)^2}{4B}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B^2}\right).$$

Da aber

$$\frac{1}{A} \geqq \frac{7}{B^2}$$

ist, kommt jetzt

$$a_{n+1} \geqq \frac{2n(n+1)^2}{B^3} \geqq \frac{(n+1)^3}{B^3},$$

und das ist die Ungleichung (12) für $m = n + 1$.

Um zu zeigen, daß

$$L_{n=\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{a_n}} = 0 \tag{14}$$

ist, wenden wir das soeben gewonnene Resultat auf die Reihe

$$\frac{\sqrt[3]{a_m}}{a_{m+1} - a_m} + \frac{\sqrt[3]{a_{m+1}}}{a_{m+2} - a_{m+1}} + \cdots = A_m$$

an. Wir erkennen dann, daß für $n \geqq m$

$$\frac{n - m + 1}{\sqrt[3]{a_n}} \leqq B_m$$

ist, wo B_m die größere der beiden Zahlen $\frac{1}{\sqrt[3]{a_m}}$, $\sqrt{7A_m}$ bedeutet, und für $n \geqq 2(m-1)$ folglich

$$\frac{n}{\sqrt[3]{a_n}} \leqq \frac{2(n-m+1)}{\sqrt[3]{a_n}} \leqq 2B_m.$$

Damit ist auch die Limesgleichung (14) bewiesen.

Eine weitergehende Aussage, als die Gleichung (14) enthält, kann man *allgemein* nicht machen. Ist nämlich $\varphi(n)$ irgend eine Funktion des Index n, die mit n gegen ∞ konvergiert, so kann man stets eine Zahlenfolge $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ angeben, für die

$$\frac{\sqrt[3]{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt[3]{a_2}}{a_3 - a_2} + \cdots$$

konvergiert und trotzdem die Limesgleichung

$$L_{n=\infty} \frac{n\,\varphi(n)}{\sqrt[3]{a_n}} = 0$$

nicht erfüllt ist.

Sind α, β zwei Exponenten, für welche $0 \leqq \alpha < \beta$ gilt, und konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\alpha}}{(a_{n+1} - a_n)^{\beta}} = A_*,$$

so bleibt für alle n

$$\frac{n}{\sqrt[\gamma]{a_n}} \leqq B_*,$$

wo

$$\gamma = \frac{1+\beta}{\beta - \alpha}, \qquad B_* = \max\left(\frac{1}{\sqrt[\gamma]{a_1}},\ \frac{\beta}{\beta-\alpha}\, 2^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} A_*^{\frac{1}{1+\beta}}\right)$$

gesetzt ist, und es wird auch wieder

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{n}{\sqrt[\gamma]{a_n}} = 0.$$

Der Beweis dieser allgemeineren Tatsache läßt sich ähnlich wie der obige für $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 1$ führen.

Den einfachsten Fall erhalten wir, wenn wir $\alpha = 0$, $\beta = 1$ nehmen. Dann lautet unser Satz: Ist

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \cdots$$

eine konvergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, so wird

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n^2} = \infty.$$

§ 6.

Konvergenz trigonometrischer Reihen.

Wir benutzen jetzt statt $Q(z)$ die Funktion

$$R(z) = z_1^2 \cdot 1^{\frac{1}{3}} + z_2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} + z_3^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} + \cdots.$$

Hilfssatz: Ist $\lambda_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$, so gilt identisch in $z_1, z_2, \cdots$

$$J(z) \leqq \sqrt{45\, R(z)}.$$

Beweis: Um $\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n})\, dx$ zu berechnen, sei G eine beliebige positive Zahl, und es bedeute für jeden Index m die Zahl $\mu(m)$ die kleinste (ganze, positive), für die

$$z_{m+1}^2 + z_{m+2}^2 + \cdots + z_{m+\mu(m)}^2 > \frac{G}{\mu(m)}$$

ist, so daß also, falls $\mu(m) \geqq 2$ ausfällt,

$$z_{m+1}^2 + \cdots + z_{m+\mu(m)-1}^2 \leqq \frac{G}{\mu(m)-1}$$

wird. Wir setzen dann

$$\begin{aligned} n_1 &= 1, \\ n_{k+1} &= n_k + \mu(n_k) \qquad\qquad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

und verfahren nunmehr genau wie in § 4, indem nur den Zeichen n_k die gegenwärtige abgeänderte Bedeutung erteilt wird. Es ist

$$\tilde{f}_n(x) = |f_n(x) - \delta_{n_k}(x) + \sqrt{2} \sum_{m=n_k+1}^{(n;\,x)} z_m \sin m\pi x|$$

für $(n; x) \geqq n_k$, mithin in $\mathfrak{E}_k$

$$(\tilde{f}_n(x))^2 \leqq 4(f_n(x))^2 + 2H^2 + 8 \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}-1} z_i^2 \cdot \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}-1} (\sin i\pi x)^2$$

und wegen $(\sin i\pi x)^2 \leqq 1$

$$\int\limits_{(\mathfrak{E}_k)} (\tilde{f}_n(x))^2\, dx \leqq \left[2H^2 + 8(n_{k+1} - n_k - 1) \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}-1} z_i^2 \right] m(\mathfrak{E}_k) + 4 \int\limits_{(\mathfrak{E}_k)} (f_n(x))^2\, dx.$$

Es ist aber nach der Erklärung von n_k (falls $n_{k+1} \geqq n_k + 2$ ist)

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}-1} z_i^2 \leqq \frac{G}{n_{k+1} - n_k - 1},$$

mithin folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{(\mathfrak{E}_1)} + \cdots + \int\limits_{(\mathfrak{E}_p)} &\leqq 2H^2 + 8G + 4\int_0^1 (f_n(x))^2\, dx \\ &\leqq 2H^2 + 8G + 4[R(z)]_n. \end{aligned}$$

Außerdem ist, wenn wir kurz R_n statt $[R(z)]_n$ schreiben,

$$R_n \geqq \sum_{k=1}^{p-1} \left(\sqrt[3]{n_k} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} z_i^2 \right) \geqq G \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\sqrt[3]{n_k}}{n_{k+1} - n_k}.$$

Greifen wir auf den Beweis des im vorigen Paragraphen entwickelten Hilfssatzes zurück, so ergibt sich hieraus

$$\frac{k}{\sqrt[3]{n_k}} \leqq \max.\left(1, \sqrt{\frac{7R_n}{G}}\right) \qquad\qquad (\text{für } k = 1, 2, \cdots, p)$$

und es folgt auf diese Weise

$$\int\limits_{(\mathfrak{D}_1)} + \cdots + \int\limits_{(\mathfrak{D}_p)} \leqq \frac{1}{H^2} \sum_{k=1}^{p} \left(k \sum_{i=n_k+1}^{[n_{k+1}, n]} z_i^2 \right) \leqq \max.\left(1, \sqrt{\frac{7R_n}{G}}\right) \cdot \frac{R_n}{H^2},$$

$$\int\limits_0^1 \sigma(\widetilde{f}_n)\, dx \leqq 2H^2 + 8G + 4R_n + \max.\left(1, \sqrt{\frac{7R_n}{G}}\right) \cdot \frac{R_n}{H^2}$$

Wählt man

$$H^2 = \sqrt{R_n}, \qquad G = \frac{7}{4} R_n,$$

so erkennt man, daß

$$\int\limits_0^1 \sigma(\widetilde{f}_n)\, dx \leqq 4\sqrt{[R(z)]_n} + 18[R(z)]_n$$

sein muß.

Bestimmt man R_0 aus der Gleichung

$$4\sqrt{R_0} + 18R_0 = 1,$$

so bekommt man

$$\frac{1}{R_0} = 26 + 4\sqrt{22} < 45;$$

mithin ist

$$[J(z)]_n \leqq \sqrt{45[R(z)]_n}.$$

Ist $c_1, c_2, \cdots$ eine Zahlenreihe, für die $R(c)$ existiert, so ergibt der hiermit erwiesene Hilfssatz

$$\underset{m=\infty}{L}\, J(0, \cdots, 0, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots) = 0$$

und damit das folgende

Theorem: *Die trigonometrische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$ *konvergiert wesentlich-gleichmäßig, wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \cdot \sqrt[8]{n}$ *konvergiert, und stellt dann eine samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion dar, welche die* c_n *zu Fourierkoeffizienten hat.*

Der gleiche Satz besteht offenbar für alle „beschränkten" Orthogonalsysteme, d. h. für solche, deren sämtliche Elemente $\Phi_n(x)$ absolut unterhalb einer von n und x unabhängigen Grenze liegen.

§ 7.

Allgemeinere Summationsverfahren.

Zum Schluß möge noch die Frage behandelt werden, wie sich die nach Orthogonalfunktionen fortschreitenden Reihen gegenüber dem Fejér-schen Summationsverfahren*) verhalten, d. h. unter welchen Umständen die Mittelwerte

$$\varphi_n(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)}{n}$$

der Partialsummen

$$f_m(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots + c_m\Phi_m(x)$$

einer nach beliebigen Orthogonalfunktionen $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\cdots$ fortschreitenden Reihe mit wachsendem n in wesentlich-gleichmäßiger Weise gegen eine Grenzfunktion $f(x)$ konvergieren.

Dafür ist hinreichend, daß

$$\underset{m=\infty}{L}\ \underset{n=\infty}{L}\int_0^1 \sigma\,(\widetilde{\varphi}_n^{(m)})\,dx = 0$$

ist, wenn für jeden Wert von x

$$\widetilde{\varphi}_n^{(m)}(x) = \max_{m<\nu\leqq n}.\ |\varphi_\nu(x) - \varphi_m(x)|\,^{**)} \qquad (n > m)$$

gesetzt wird. Wir verfahren dann wie früher, indem wir jetzt

$$n_{k+1} = m\cdot 2^k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

setzen und uns bei der Abschätzung auf die folgenden Relationen stützen:

1) $\widetilde{\varphi}_n^{(m)} \leqq |\varphi_n - \varphi_m| + \max_{m<\nu\leqq n}.\ |\varphi_n - \varphi_\nu|$,

2) $$|\varphi_n - \varphi_\nu| = \left|\frac{(\varphi_n - f_1) + (\varphi_n - f_2) + \cdots + (\varphi_n - f_\nu)}{\nu}\right|$$
$$\leqq \left|\frac{(\varphi_n - f_1) + \cdots + (\varphi_n - f_\mu)}{\mu}\right| + \frac{|\varphi_n - f_{\mu+1}| + \cdots + |\varphi_n - f_\nu|}{\mu}$$
$$\leqq |\varphi_n - \varphi_\mu| + \frac{|\varphi_n - f_{\mu+1}| + \cdots + |\varphi_n - f_{2\mu}|}{\mu}$$
(gültig für $\mu \leqq \nu \leqq 2\mu$),

3) $$\int_0^1 (\varphi_n - f_\nu)^2\,dx \leqq \frac{c_1^2 + (2c_2)^2 + \cdots + (\nu c_\nu)^2}{n^2} + c_{\nu+1}^2 + c_{\nu+2}^2 + \cdots + c_n^2$$
$$\leqq \frac{c_1^2 + (2c_2)^2 + \cdots + (\mu c_\mu)^2}{n^2} + c_{\mu+1}^2 + c_{\mu+2}^2 + \cdots + c_n^2$$
(gültig für $\mu \leqq \nu \leqq n$),

4) $\underset{\substack{m=\infty\\ n=\infty}}{L}\int_0^1 (\varphi_m - \varphi_n)^2\,dx = 0$, falls $\sum_1^\infty c_n^2$ endlich ist.

---

*) L. Fejér, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann. Bd. 58, pag. 52.

**) Dieses Zeichen bedeutet die größte unter den $n - m$ Zahlen

$$|\varphi_\nu(x) - \varphi_m(x)| \qquad (\nu = m+1, m+2, \cdots, n).$$

Das Resultat, welches sich auf solche Weise ergibt, lautet:

Die Fejér'schen Mittelwerte der Partialsummen einer nach Orthogonalfunktionen fortschreitenden Reihe

$$c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots$$

konvergieren wesentlich-gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, falls die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lg n$ *existiert.*

Endlich möge noch gezeigt werden, wie einfach mit den hier entwickelten Hilfsmitteln ein von Herrn E. Fischer*) aufgestellter Konvergenzsatz bewiesen werden kann. Mit Fischer nennen wir eine Reihe von Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, die samt ihrem Quadrat im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ integrierbar sind, *im Mittel konvergent*, wenn

$$\underset{\substack{m=\infty \\ n=\infty}}{L} \int_0^1 (f_m - f_n)^2 \, dx = 0 \tag{15}$$

ist.

Satz: *Ist* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ *eine im Mittel konvergente Funktionsfolge, so ist es möglich, eine solche Reihe von Indizes* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ *auszuwählen, daß* $f_{n_k}(x)$ *mit wachsendem* k *wesentlich-gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion* $f(x)$ *konvergiert.*

Aus der Voraussetzung (15) folgt, daß für jedes m die unendlich vielen Werte $\int_0^1 (f_n - f_m)^2 \, dx$ $(n = m+1, m+2, \cdots)$ eine obere Grenze ε_m haben und $\underset{m=\infty}{L} \varepsilon_m = 0$ ist. Ich nehme zunächst an, daß

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots \tag{16}$$

konvergiert, und zeige, daß alsdann die Folge $f_1(x), f_2(x), \cdots$ selbst wesentlich-gleichmäßig gegen eine Grenze $f(x)$ konvergiert. Dazu setze ich für jeden Wert von x, wie in § 3,

$$\widetilde{f}_n^{(m)}(x) = \max_{m < \nu \leqq n} |f_\nu(x) - f_m(x)| \qquad (n > m)$$

und habe dann nur zu zeigen, daß

$$\underset{m=\infty}{L} \; \underset{n=\infty}{L} \int_0^1 \sigma(\widetilde{f}_n^{(m)}) \, dx = 0 \tag{17}$$

ist. Nun gilt aber

*) Comptes Rendus 1907, pag. 1022.

$$\widetilde{f_n^{(m)}} \leqq |f_n - f_m| + \max_{m < \nu \leq n} |f_n - f_\nu|,$$

$$\sigma(\widetilde{f_n^{(m)}}) \leqq (\widetilde{f_n^{(m)}})^2 \leqq 2(f_n - f_m)^2 + 2 \cdot \left(\max_{m < \nu \leq n} |f_n - f_\nu|\right)^2$$

$$\leqq 2\{(f_n - f_m)^2 + (f_n - f_{m+1})^2 + \cdots + (f_n - f_{n-1})^2\},$$

$$\int_0^1 \sigma(\widetilde{f_n^{(m)}})\, dx \leqq 2(\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} + \cdots + \varepsilon_{n-1}).$$

Damit ist die Gleichung (17) bewiesen.

Konvergiert hingegen (16) nicht, so läßt sich immerhin auf mannigfache Art eine Reihe von Indizes $n_1, n_2, \cdots$ so auswählen, daß

$$\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \cdots$$

konvergiert. Wenden wir dann die soeben bewiesene Behauptung statt auf die Funktionsfolge $f_1, f_2, \cdots$ auf $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots$ an, so erkennen wir die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Die Grenzfunktion $f(x)$, deren Existenz durch diesen Satz garantiert wird, ist offenbar quadratisch integrierbar und genügt der Limesgleichung

$$\underset{k=\infty}{L} \int_0^1 (f - f_{n_k})^2\, dx = 0.$$

Da aber für beliebiges n

$$\sqrt{\int_0^1 (f - f_n)^2\, dx} \leqq \sqrt{\int_0^1 (f_n - f_{n_k})^2\, dx} + \sqrt{\int_0^1 (f - f_{n_k})^2\, dx}$$

gilt, folgt

$$\int_0^1 (f - f_n)^2\, dx \leqq \varepsilon_n,$$

mithin

$$\underset{n=\infty}{L} \int_0^1 (f - f_n)^2\, dx = 0.$$

Die Existenz einer Funktion $f(x)$, welche diese Gleichung befriedigt, ist es, die in dem Fischer'schen Konvergenzsatz behauptet wird.*)

Ist $n_1^*, n_2^*, \cdots$ eine andere Indizesreihe von der Beschaffenheit, daß

*) Von den bekannten Beweisen (Riesz, Gött. Nachr. 1907, pag. 116; Fischer, l. c.; Hellinger, Dissertation, Göttingen 1907, pag. 81) unterscheidet sich der hier gegebene namentlich dadurch, daß er nicht erst, wie jene, zu der durch gliedweise Integration gewonnenen Funktionenreihe übergeht.

$f_{n_1^*}, f_{n_2^*}, \cdots$ wesentlich-gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f^* konvergiert, so ist notwendig $f(x) = f^*(x)$ außer für Werte x, die einer gewissen Menge vom Maße 0 angehören.

Die Anwendung unseres Satzes auf Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, beruht auf der bekannten Tatsache, daß die Partialsummen einer solchen im Mittel konvergieren, falls die Koeffizienten eine konvergente Quadratsumme besitzen, und er liefert unter dieser Voraussetzung ein direktes Verfahren zur Summation der Reihe

$$c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) + \cdots.$$

Göttingen, Juni 1908.