4. *Zur Bestimmung der Dauer electrischer Schwingungen von grossen Perioden;*
von J. Bergmann.

---

1. Grenzdauer der electrischen Schwingungen von grossen Perioden. Angabe der zu messenden Zeit.

In der vorliegenden Abhandlung berichte ich über eine Messung der Zeit, welche sich als vortheilhaft erweist für das Studium electrischer Schwingungen von grossen Perioden. Zu dieser Gruppe rechnet man die Schwingungen, wenn ihre Periodendauer grösser ist als ein Millionstel einer Secunde. Die Grenze wird gezogen durch die Geschwindigkeiten der Körper, die man in Bewegung setzt, sei es um electrische Schwingungen hervorzurufen, oder um auf sie bezügliche Zeiten zu messen. Unter günstigen Umständen lässt sich mit den gewöhnlichen zur Hand befindlichen Mitteln eine Geschwindigkeit von 10 m/sec erreichen. Hiermit würde ein gleichförmig bewegter Körper in einem Millionstel einer Secunde eine Strecke von 0,01 mm durchlaufen. Solch eine Länge hat man aber vermittelst Centesimaltheilung eines Kreises bequem zur Verfügung und kommt darum bei der Wahl der Zeiteinheit, als welche ein zwar möglichst kleines, aber experimentell doch leicht verwendbares Intervall erwünscht ist, an die erwähnte Grenze heran.

Was die zu verändernde und zu messende Zeit betrifft, so denke man sich einen Körper, welcher ohne Dämpfung Sinusschwingungen ausführt, z. B. das Pendel oder den Balancier einer gehenden Uhr, ferner electromagnetisch getriebene Sachen, eine Lamelle, eine Saite oder eine Stimmgabel. Einzelne Stellen des Körpers bewegen sich dann in derselben Weise. Wenn man an einer von ihnen einen Punkt markirt, so giebt dessen Bewegung Anlass zur Unterscheidung von drei Schwingungselementen, nämlich

1. der Amplitude,
2. der Schwingungsdauer,
3. eines Stückes der Amplitude, welches der schwingende Punkt in einem Bruchtheile der Schwingungsdauer durchläuft.

Der Bruchtheil nun ist die uns interessirende Zeit. Von ihr ausgehend habe ich vorläufig die Periodendauer electrischer Schwingungen bestimmt. Das Ergebniss lässt aber übersehen, dass die Verwerthung der drei Elemente sich auch empfiehlt, wenn logarithmische Decremente, Phasenunterschiede und Schwingungsformen Gegenstand der Ermittelung sind.

2. Versuchsanordnung. Theorie der electrischen Schwingungen bei der Entladung eines Condensators.

Electrische Schwingungen kann man sich verschaffen, indem man in einer Drahtrolle einen Magneten oder eine zweite Drahtrolle rotiren lässt. Erfolgt die Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit, so haben die Schwingungen constante Amplituden. Andere Versuche wären, einen Condensator von einer Stromquelle aus, etwa mit einer Inductionsrolle oder einer Kette, zu laden, ferner einen geladenen Condensator zu entladen. Sowohl in der Lade-, wie in der Entladeleitung verläuft die Bewegung der Electricität oscillatorisch, wenn in der Anordnung die Constanten der Leitung: Widerstand, Capacität und Coefficient der Selbstinduction, die nothwendigen Bedingungen erfüllen. Auf diese Weise entstehen gedämpfte Schwingungen.

Ich habe die Periodenzeiten von Schwingungen der letzteren Art gemessen und zwar an Entladungsströmen.

Die Versuchsanordnung war diejenige, welche Siemens getroffen hat, um den Isolationswiderstand von Kabeln zu prüfen. Die Fig. 1 veranschaulicht die Anordnung. In ihr bedeutet C einen Condensator, K eine Kette, R eine Drahtrolle. Zur Erde sind abgeleitet: ein Pol der Kette, eine Belegung des Condensators und ein Ende der Rolle. Eine in B befindliche Vorrichtung bedient die beiden Contacte *1* und *2*. Wie angegeben, verbindet der Schluss von *1* die zweite Belegung des Condensators mit dem zweiten Kettenpole, sodass von der Kette aus die Belegung geladen wird. Wenn man darauf den Contact *1* unterbricht und *2* schliesst, so wird die geladene Belegung mit der Erde verbunden, und die angesammelte

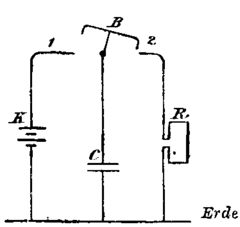

Fig. 1.

Electricitätsmenge fliesst dorthin je nach Umständen ganz oder zum Theil ab.

Um die Bedingungen dafür anzuführen, dass während der Entladung electrische Schwingungen auftreten, bezeichne

Q die nach Unterbrechung von *1* und vor Schluss von *2* auf der Condensatorbelegung vorhandene Electricitätsmenge,

c die Capacität des Condensators,

p den Selbstinductionscoefficienten der Entladeleitung,

w ihren Widerstand.

Zur Berechnung der Menge q auf der Belegung und der Stromstärke i in der Leitung zur Zeit ϑ nach Beginn der Entladung bestehen sodann nach W. Thomson[1]) die beiden Gleichungen

$$p\,i\,d\,i + w\,i^2\,d\,\vartheta = \frac{q}{c}\,i\,d\,\vartheta\,, \tag{1}$$

$$i = -\frac{d\,q}{d\,\vartheta}\,. \tag{2}$$

Wird daraus i eliminirt, so folgt

$$\frac{d^2 q}{d\,\vartheta^2} + \frac{w}{p}\,\frac{d\,q}{d\,\vartheta} + \frac{q}{p\,c} = 0\,. \tag{3}$$

Für den Fall, dass die Constanten p, c und w die Ungleichung erfüllen

$$\frac{w}{2} < \sqrt{\frac{p}{c}}\,,$$

ist die Auflösung von Gleichung (3)

$$q = e^{-\frac{w}{2p}\vartheta}\,(A \cos \beta\,\vartheta + B \sin \beta\,\vartheta). \tag{4}$$

Hierin bedeuten A und B die willkürlichen Constanten des Integrals und zur Abkürzung ist

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{p\,c} - \frac{w^2}{4\,p^2}} \tag{5}$$

gesetzt.

Der Anfangspunkt der Zeit ϑ möge zusammenfallen mit dem Augenblick, in welchem durch Schluss des Contactes *2* die Leitung hergestellt wird. Da in diesem Moment die Entladung nach der Erde beginnt, vorher also die Leitung strom-

1) W. Thomson, Phil. Mag. (4) **5.** p. 393. 1853.

los war, so sind die Bedingungen zur Bestimmung von A und B

$$q = Q \quad \text{und} \quad i = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = 0.$$

Sie liefern

$$A = Q,$$

$$B = \frac{w}{2\,p\,\beta}\,Q.$$

Mithin ergiebt die Gleichung (4) für die Electricitätsmenge q zu verschiedenen Zeiten ϑ den Ausdruck

$$q = Q\,e^{-\frac{w}{2p}\vartheta}\left(\cos\beta\,\vartheta + \frac{w}{2\,p\,\beta}\sin\beta\,\vartheta\right). \tag{6}$$

Die Summe in der Klammer lässt sich umgestalten durch Einführung eines Hülfswinkels φ, welcher bestimmt ist durch die Relation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\,p\,\beta}{w}. \tag{7}$$

Damit wird

$$\frac{w}{\sqrt{w^2 + 4\,p^2\,\beta^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{2\,p\,\beta}{\sqrt{w^2 + 4\,p^2\,\beta^2}} = \sin\varphi,$$

und man kann für q schreiben

$$q = \frac{Q}{\beta\sqrt{p\,c}}\,e^{-\frac{w}{2p}\vartheta}\sin(\beta\,\vartheta + \varphi). \tag{8}$$

Die Stromstärke i folgt daraus nach Gleichung (2) durch Differentiation. Bei Berücksichtigung des Ausdruckes für β in (5) erhält man

$$i = \frac{Q}{\beta\,p\,c}\,e^{-\frac{w}{2p}\vartheta}\sin\beta\,\vartheta. \tag{9}$$

Die Ausdrücke (6), (8), und (9) stellen mithin als Lösungen der Gleichungen (1) und (2) die Schwingungen der Electricitätsmenge auf der Belegung des Condensators und der Stromstärke in der Leitung C, 2, Rolle und Erde während der Entladung dar.

Untersucht man ihren zeitlichen Verlauf, so hat zuerst q seine extremen Werthe, wenn $i = 0$ ist. Nach Beginn der Entladung geschieht das wegen Gleichung (9) zu den Zeiten

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\pi}{\beta}, \quad \frac{2\,\pi}{\beta}, \quad \frac{3\,\pi}{\beta} \ldots$$

Die entsprechenden q sind

$$Q, \quad -Q e^{-\frac{w\pi}{2p\beta}}, \quad +Q e^{-\frac{2w\pi}{2p\beta}}, \quad -Q e^{-\frac{3w\pi}{2p\beta}} \ldots$$

Die Stromstärke nimmt ihre grössten und kleinsten Werthe an für

$$\frac{di}{d\vartheta} = 0 \quad \text{oder} \quad \beta \cos \beta \vartheta = \frac{w}{2p} \sin \beta \vartheta.$$

Dieser Bedingung wird genügt, falls die Gleichung (7) besteht. Wie die Gleichungen (8) und (9) zeigen, ist der aus (7) berechnete Winkel φ die Phase, um welche sich die Schwingungen von q und i unterscheiden.

Den Beginn der Entladung als Ausgangspunkt für ϑ behalten, sind die extremen Stromstärken vorhanden zu den Zeiten

$$\vartheta = \frac{\varphi}{\beta}, \quad \frac{\varphi + \pi}{\beta}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{\beta} \ldots$$

Ihnen gehören die Werthe von i zu

$$i_1 = \frac{Q}{\beta p c} e^{-\frac{w\varphi}{2p\beta}}, \quad i_{1+n} = (-1)^n e^{-\frac{n w \pi}{2p\beta}} i_1,$$

wo n für die ganzen Zahlen von 1 an aufwärts gesetzt ist.

Für das Dämpfungsverhältniss $\varkappa$ der Schwingungen, den absoluten Betrag des Verhältnisses einer Amplitude zu der auf sie folgenden, erhält man daher

$$\varkappa = e^{\frac{w\pi}{2p\beta}};$$

ferner, wenn T die halbe Dauer einer vollen Schwingungsperiode bezeichnet,

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{pc} - \frac{w^2}{4p^2}}}. \tag{10}$$

Durch Vernachlässigung des zweiten Gliedes unter dem Wurzelzeichen entsteht hieraus der Näherungswerth

$$T = \pi \sqrt{pc}. \tag{10a}$$

Die Aenderung in der Zeit T will ich im Folgenden als Periode ansehen.

3. Ueber die Ermittelung einer Periodendauer. Arbeiten aus der Literatur. Rayleigh'sche Contacte.

Wenn es sich nun darum handelt, den Werth von T anzugeben, so würde man ja die Constanten unter dem Wurzelzeichen einsetzen und T berechnen können. Einfacher jedoch erreicht man das Ziel experimentell, indem man so vorgeht, wie es zur Bestimmung der Periodendauer irgend eines in Schwingungen verlaufenden Processes allgemein zu geschehen pflegt. Es heisse:

Periodenzeit ein die zu bestimmenden und abgezählten Perioden fassender Zeitraum;

Einheitszeit derjenige, auf welchen ebenfalls abgezählte Zeiteinheiten von bekanntem Werthe entfallen.

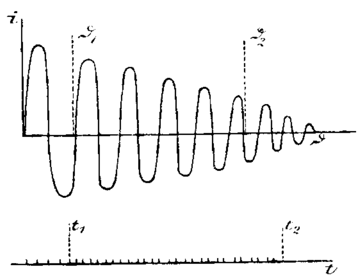

Fig. 2.

Die Aufgabe, eine Periodendauer zu ermitteln, spaltet sich dann in die beiden anderen: Abgrenzung der Periodenzeit und Messung der Einheitszeit. Der Vergleich beider ergiebt die gesuchte Dauer.

Von den beiden Grössen q und i habe ich die letztere gewählt und T galvanometrisch bestimmt. Die Ausführung gestaltet sich folgendermaassen.

In der Fig. 2 ist die Curve der Gleichung (9) gezeichnet, darunter die Einheitszeit angedeutet. Fasst die Differenz $\vartheta_2 - \vartheta_1$ die Anzahl a Perioden von der Dauer T, ferner $t_2 - t_1$ ebenso ν Einheiten von dem bekannten Werthe τ, so ist

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = a\,T, \quad t_2 - t_1 = \nu\,\tau,$$

$$T = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{t_2 - t_1}\,\frac{\nu}{a}\,\tau.$$

Um die Stärke des Entladungsstromes zu verschiedenen Zeiten ϑ mit dem Galvanometer zu messen, kann man sich der einmaligen oder der mehrmaligen Condensatorladung und -Entladung bedienen.

In dem einen Falle wird der Condensator einfach geladen und entladen, und man beobachtet den ersten Ausschlag, welchen der Stoss des Entladungsstromes der Nadel ertheilt.

Bei der mehrmaligen Ladung wird der Condensator in der Secunde n mal geladen und entladen. Durch das Galvanometer fliessen in der Secunde daher auch n Stromstösse; diese lenken die Nadel aus der Ruhelage ab wie ein constanter Strom, sobald Schluss und Unterbrechung der Contacte *1* und *2* hinlänglich oft und regelmässig genug erfolgen.

Die Methoden der Multiplication und Zurückwerfung von W. Weber[1]) fallen unter das Verfahren der einmaligen Ladung.

Aus der Literatur möchte ich jetzt erst die Arbeiten anführen von drei Physikern, die sich mit electrischen Schwingungen von grossen Perioden beschäftigt und die Stromstärken ebenfalls galvanometrisch gemessen haben. Daraus ist an dieser Stelle zu erwähnen, wie zur Bestimmung der Schwingungsdauer anderweitig die Abgrenzung der Periodenzeit und die Messung der Einheitszeit erfolgte, und welche Mittel dabei gebraucht worden sind.

Zwei jener Arbeiten sind jüngeren Datums, sie rühren her von Tallqvist[2]) und Seiler[3]) und haben das Studium der Ladungsströme in der Leitung k, *1* und Condensator in der Fig. 1 zum Gegenstand. Tallqvist und Seiler benutzten die einmalige Ladung des Condensators und begrenzten die Periodenzeit mit dem Helmholtz'schen Pendelunterbrecher. Die Einheitszeit schafften sie sich mit Hülfe der Pouillet'schen Methode der Zeitmessung.

Ueber Schwingungen der Entladungsströme hat Klemenčič Versuche angestellt. Sie sind enthalten in einem Anhang[4]) zu der Abhandlung über Klemenčič's weiter zurückliegende Bestimmung der Grösse v, des Verhältnisses electrostatisch gemessener Einheiten zu ihrem Werthe im electromagnetischen Maasssystem und in einer sich anschliessenden Abhandlung[5]) „Ueber die Dämpfung electrischer Oscillationen".

1) W. Weber, Abhandl. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **1.** p. 230. 1846.

2) Hj. Tallqvist, Wied. Ann. **60.** p. 248. 1897.

3) U. Seiler, Wied. Ann. **61.** p. 30. 1897.

4) J. Klemenčič, Exner's Rep. **22.** p. 585. 1886.

5) l. c. p. 587.

Klemenčič hat die $n$malige Ladung und Entladung des Condensators angewandt. Seine Unterbrechungsvorrichtung war ein Stimmgabelunterbrecher mit den von Rayleigh[1]) beschriebenen Contacten.

Rayleigh'sche Contacte werden dadurch gebildet, dass ein „metallic dipper", ein gerader Platinstift, in Quecksilber eintaucht in einer zu dessen Oberfläche senkrechten Richtung. Der Stift sitzt an dem Zinken einer electromagnetisch anzuregenden Stimmgabel oder an einem anderen, in Schwingungen zu versetzenden Stiftträger, Lamelle, Saite oder dgl. Das Ganze ist so angeordnet, dass während einer Schwingung die Spitze des Platinstiftes ein Stück ihrer Bahn im Quecksilber zurücklegt.

Die Periodenzeit bei Klemenčič's Versuchen war also ein Bruchtheil der Schwingungsdauer einer Stimmgabel. Die Einheitszeit ermittelte Klemenčič auch nach Pouillet und setzte

$$t = \frac{1}{n} \frac{\varphi}{\Phi},$$

wenn φ und Φ die Ablenkungen der Galvanometernadel durch die Stromstösse, bez. durch den Dauerstrom sind, und wenn der Condensator in der Secunde $n$mal geladen und entladen wird.

4. Berührungsdauer der Metalle eines Rayleigh'schen Contactes. Einstellung des Quecksilbernapfes.

Zu den Beobachtungen der Stromstärken mit dem Galvanometer verwende ich wie Klemenčič die mehrmalige Ladung und Entladung des Condensators. An den Stellen *1* und *2* in der Fig. 1 sind Quecksilbercontacte nach Rayleigh eingeschaltet und werden so geschlossen und unterbrochen, dass die Platinstifte mit einem Phasenunterschiede von 180° schwingen.

Die Dauer des Contactes *2* repräsentirt die Periodenzeit. Diese wird aber nicht erhalten vermittelst einer nach Pouillet für sich getrennt gemessenen Einheitszeit, sondern abgeleitet aus den drei Elementen, welche man nach dem Früheren an der Bewegung eines Punktes unterscheiden kann, wenn er an einem dämpfungsfreie Sinusschwingungen ausführenden Körper markirt ist.

---

1) Rayleigh, Phil. Mag. (5) 21. p. 10. 1886.

Die Elemente waren die Schwingungsdauer, die Amplitude und ein Stück der Amplitude. An einem Rayleigh'schen Contacte sind dieselben vorhanden, denn der markirte Punkt bietet sich dar als die Spitze des Platinstiftes, und es liegt die Amplitude zwischen den Umkehrpunkten der Stiftspitze, das Amplitudenstück ist gegeben durch den halben, von der Spitze des Stiftes im Quecksilber zurückgelegten Weg, die Schwingungsdauer endlich ist gleich der Schwingungsdauer des Stiftträgers.

Um die Berührungsdauer der Contactmetalle anzugeben, sollen Voraussetzungen sein, dass die Dauer begrenzt wird durch die beiden Momente, in denen die Spitze des Platinstiftes durch die Oberfläche des Quecksilbers hindurchgeht; ausserdem sollen jene Momente von dem Zeitpunkt der Umkehr des Platinstiftes im Quecksilber gleich weit entfernt sein. Die Schwingungsbahn der Stiftspitze mag als geradlinig gelten. Unter diesen Annahmen erhält man die Periodenzeit auf folgende Weise.

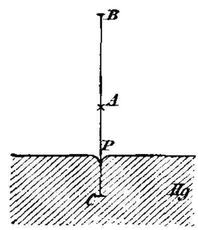

Fig. 3.

Ein Punkt P von der Masse 1 führt auf einer Geraden um die Gleichgewichtslage A in Fig. 3 Sinusschwingungen aus, ohne Dämpfung. Welche Zeit vergeht, wenn während der Bewegung von C nach B der Punkt den Weg CP zurücklegt, und der Abstand $CP = s$, ferner die Amplitude $BC = 2r$ und die Dauer einer vollen Schwingung $= \mathfrak{T}$ gegeben sind?

Bezeichnet x den Abstand des Punktes von A zur Zeit t, so ist seine Bewegung bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + c^2 x = 0.$$

Daraus folgt

$$x = a \cos c t + b \sin c t,$$

a und b die willkürlichen Constanten des Integrals, c gegeben durch die Relation

$$\frac{1}{c} = \frac{\mathfrak{T}}{2 \pi}.$$

Die Zeit rechne ich von einem Augenblick an, in welchem

P in C umkehrt. Dann sind die Bedingungen zur Bestimmung von a und b, dass für $t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad x = r$$

ist. Demnach wird

$$x = r \cos c\, t.$$

Wenn der Punkt von C aus das Stück s zurückgelegt hat, so ist

$$x = r - s.$$

Führt man dieses s ein und beachtet den Werth von $1/c$, so erhält man für die zum Durchlaufen von s erforderliche Zeit

$$t = \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} \arccos\left(1 - \frac{s}{r}\right).$$

Die horizontale Linie über Hg in Fig. 3 möge die Oberfläche des Quecksilbers andeuten und C die Stelle, an welcher in ihm die Spitze des Platinstiftes umkehrt. Das Stück s stellt somit den halben, während einer vollen Schwingung des Stifthalters von der Spitze des Stiftes im Quecksilber zurückgelegten Weg dar. Zufolge dessen ist, wenn ϑ die Berührungsdauer bezeichnet, $\vartheta = 2t$ und man erhält

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{T}}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{s}{r}\right). \tag{11}$$

Für s bestehen die Grenzen

$$0 < s < 2r.$$

Das Argument des Arcuscosinus kann daher auch negativ werden. Das tritt ein für $s > r$. Für solche Werthe von s braucht man die Gleichung

$$\arccos(-z) = \pi - \arccos z.$$

Es ist zunächst

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Setzt man weiter

$$\alpha = \arccos z, \quad \text{demnach} \quad -z = -\cos \alpha,$$

so ergiebt sich

$$\arccos z + \arccos(-z) = \pi.$$

Wenn der Platinstift schwingt und in das Quecksilber eintaucht, so liefert die Formel (11) die Lösung der beiden Aufgaben:

A. Gegeben ist die Höhe des Quecksilbernapfes, gesucht wird die Berührungsdauer der Metalle.

B. Gegeben ist die Berührungsdauer, gesucht wird die Einstellung des Napfes, welche zur Erlangung der Dauer nothwendig ist.

Man stellt ein mit Hülfe der Länge s und hat explicite

$$s = 2\, r \sin^2 \frac{\pi}{2\mathfrak{T}}\, \vartheta. \tag{12}$$

Die anlässlich der beiden Aufgaben A und B zu bestimmenden Grössen sind

1. die Amplitude der Spitze des Platinstiftes $2\,r$,

2. die Hälfte s des von ihr während einer vollen Schwingung im Quecksilber zurückgelegten Weges,

3. die Schwingungsdauer $\mathfrak{T}$ des Stiftträgers.

Hiervon erhält man 1. und 2. vermittelst eines Rayleigh'schen Contactes von der aus Fig. 4 ersichtlichen Einrichtung.

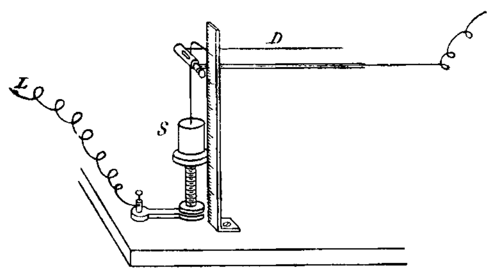

Fig. 4.

Die auf dem Kopfe mit Kreistheilung versehene Stellschraube S trägt den Quecksilbernapf, sodass man ihn allmählich heben und senken kann. Die Höhen des Napfes werden an einer neben S vertical aufgestellten Scala abgelesen. Die Kreistheilung giebt die Hundertstel der Theile auf der Verticalscala an.

Als Träger für den Platinstift dient der Halter D. Seitlich an D ist der Leitungsdraht befestigt, durch welchen die Stromzuführung zu dem Platinstifte erfolgt. Von dem Stift aus durch den Contact ist sodann die Strombahn: Quecksilber, Napf, Stellschraube und der Leitungsdraht L.

Die Amplitude $2\,r$ bestimmt man aus den Umkehrpunkten, welche ein an dem Halter befindlicher Zeiger auf der Scala angiebt. Hierzu eignet sich gleich das obere Ende des Platinstiftes, wenn es umgebogen und so lang genommen wird, dass es die Theilung der Scala ein wenig bedeckt.

Zum Messen des Weges s legt man auf der Scala einen Ausgangspunkt fest. Als solchen kann man den Umkehrpunkt der Stiftspitze im Quecksilber wählen. Um diesen Punkt auf der Scala abzulesen, habe ich den Contact in einen Stromkreis eingeschaltet und den Quecksilbernapf langsam verschiebend, Schluss und Unterbrechung der Leitung beobachtet, während der Platinstift Schwingungen ausführte. Mit einer gut gearbeiteten Stellschraube, mit reinen Contactmetallen und bei sorgfältiger Aufstellung des den Contact tragenden Apparates ist jene Stelle deutlich herauszufinden. Giebt die Länge l_0 ihre Lage auf der Scala an und man hat den Napf gehoben bis l_n, so ist

$$s = l_n - l_0.$$

Die Schwingungsdauer $\mathfrak{T}$ wird ermittelt auf bekannte Weise.

Will man sie graphisch mit der Schwingungsdauer einer Stimmgabel vergleichen, so empfiehlt es sich, an dem Halter D den Schreibstift an einer Stelle anzubringen, dass die Amplitude seiner Spitze nahezu so gross wird, wie die von der Spitze des Schreibstiftes an dem Stimmgabelzinken gemachten. Wenn man danach die Stimmgabel so anordnet, dass der eine Schreibstift über dem anderen steht, und zur sicheren Führung den berussten Glasstreifen durch eine passend angebrachte Schiene hindurchbewegt, so kann man an den Schreibstiften mit der linken Hand den Glasstreifen vorüber ziehen, während man mit der rechten die Stimmgabel anstreicht. Auf diese Weise entstehen die Curven zum Abzählen von $\mathfrak{T}$ mit Leichtigkeit beim ersten Versuch.

Wo man zum Studium electrischer Schwingungen Contacte nach Rayleigh anwendet, kann es vielfach erwünscht sein von den beiden Stücken: Contactdauer und einzustellende Höhe des Quecksilbernapfes, das eine angenähert zu kennen, wenn das andere gegeben ist, ohne erst nach den beiden Formeln (11) und (12) die Rechnung ausführen zu müssen. Entsprechend den Aufgaben A und B auf p. 695 habe ich deshalb die Berührungszeiten und zugehörigen halben Wege der Spitze des Platinstiftes im Quecksilber für eine Anzahl vorkommender Fälle zusammengestellt. Als Längeneinheit λ wurde ein Centesimaltheil der Kreistheilung auf S in Fig. 4 genommen.

Unter Berücksichtigung der für die Bewegung der Stiftspitze gemachten Voraussetzungen enthält bei einer Schwingungsdauer des Stiftträgers von $\mathfrak{T} = {}^1/_{30}$ sec die folgende Tabelle die Zeiten ϑ in Millionsteln einer Secunde für eine Anzahl Werthe von s, die zu vier Amplituden gehören.

Dem Wachsen des Weges s beim Emporsteigen des Quecksilbernapfes folgend, beginnen die Zahlenreihen am Fusse der Tabelle.

Berührungszeiten der Metalle eines Rayleigh'schen Contactes bei einer Schwingungsdauer des Platinstiftes von $\mathfrak{T} = {}^1/_{30}$ sec.

$2r \cdot 10^{-2}$ / $s \cdot 10^{-2}$	16λ	20λ	24λ	28λ
28 λ				0,033 333
26				27 590
24			0,033 333	25 109
22			27 118	23 120
20		0,033 333	24 411	21 366
18		26 508	22 222	19 740
16	0,033 333	23 496	20 272	18 187
14	25 664	21 034	18 443	0,016 667
12	22 222	18 804	0,016 667	15 146
10	19 348	0,016 667	14 890	13 593
8	0,016 667	14 530	13 061	11 967
6	13 985	12 300	11 111	10 213
4	11 111	9 844	8 922	8 224
2	7 669	6 826	6 215	5 743
0	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000

Die Ganghöhe der benutzten Stellschraube war

$$100\,\lambda = \frac{25}{27}\,\text{mm}.$$

Da die Zeit ϑ eine Function des Verhältnisses s/r ist, so sind die Zahlen auch auf andere Längen λ anwendbar.

In Centimetern sind die Werthe der vier Amplituden

$$2r = 1{,}48, \quad 1{,}85, \quad 2{,}22, \quad 2{,}59 \text{ cm}.$$

5. Anwendung von mehr als einem Contact. Uebergreifende Contacte. Ein Hebelunterbrecher.

Im Anschluss an das über einen Contact Gesagte sind jetzt Fälle zu betrachten, in denen mehr als ein Contact Anwendung findet und im Gegensatz zu dem Betrieb mit rotirenden, durch schwingende Körper bedient werden. Theils um *eine* Stelle in jeder von zwei oder mehreren Strombahnen, theils um dieselbe Strombahn an mehreren Stellen zu unterbrechen, hat man Vorrichtungen der gedachten Art in ziemlicher Mannichfaltigkeit construirt. Es seien nur angeführt: der Unterbrecher von Foucault, die von du Bois-Reymond herrührende Form, in anderer Weise ausgeführt von Lewandowsky, ferner der Pendelunterbrecher von Helmholtz, sodann die verschiedenen Stimmgabel- und Saitenunterbrecher, schliesslich der von mir beschriebene Disjunctor.[1])

Ich will annehmen, dass ein Unterbrecher ausgerüstet ist mit lauter Rayleigh'schen Contacten. Jeder einzelne möge die Einrichtung haben, dass nach Herstellung der Strombahn in der Reihenfolge der Leiter: Stellschraube, Quecksilber und Platinstift, die weitere Fortführung des Stromes durch den Stifthalter selbst oder durch eine Leitung erfolgt, welche an dem Stifthalter entlang läuft bis zu einer nahezu in Ruhe bleibenden Stelle, und dass erst von da ab der Strom vermittelst eines leicht federnden Drahtes in die Versuchsanordnung übergeht.

An Stimmgabelunterbrechern sieht man den zweiten Theil der Strombahn auch in anderer Weise hergestellt. Der Strom fliesst durch einen quer über den Zinken gelegten Bügel, sodann durch einen zweiten Contact, aus dessen Quecksilber die Spitze des Platinstiftes nicht heraustritt. Letzteren, gewissermaassen todten Contact, scheidet der kleine Kunstgriff, die Leitung an dem Stifthalter entlang zu führen, aus und ermöglicht es, an seine Stelle einen anderen, wirklichen Unterbrechungscontact zu setzen.

Die besprochene Zeitmessung giebt uns die Mittel an die Hand, bei mehreren Contacten unter den schwingenden Platinstiften den Quecksilbernäpfen die erforderlichen Höhen planmässig ebenso zuzuweisen, wie bei einem einzelnen. Man bewirkt die Einstellungen mit Berücksichtigung der halben, von den Stiftspitzen im Quecksilber zurückgelegten Wege, nachdem

1) Vgl. hierzu ausser der einschlägigen Literatur auch die Abhandl. von A. Dvořák, Westphal's Zeitschr. f. Instrumentenk. **11.** p. 423. 1891.

man zuvor auf Scalen Ausgangspunkte abgelesen hat. Je nach Umständen beachtet man die Differenzen oder die Summen der Wege.

Die folgenden vier Combinationen von Contacten sollen behandelt werden.

Für einen Contact $\varkappa$, dessen Stiftträger die Schwingungsdauer $\mathfrak{T}$ hat, bezeichne allgemein

$\vartheta_\varkappa$ die Berührungsdauer der Metalle,

$2\,r_\varkappa$ die Amplitude der Spitze des Platinstiftes,

$s_\varkappa$ den halben, von der Spitze im Quecksilber zurückgelegten Weg.

1. Fall. Zwei Strombahnen enthalten die Contacte a und b. Die Schwingungen der Platinstifte haben gleiche Phasen.

Die Anordnung entsteht dadurch, dass die Stifte beide an dem schwingenden Ende eines Stiftträgers sitzen, wie an dem Unterbrecher nach Foucault und an meinem Disjunctor.

Zur Einstellung der Quecksilbernäpfe bilde ich die halbe Differenz der Contactzeiten

$$\delta_0 = \tfrac{1}{2}(\vartheta_b - \vartheta_a).$$

Ist zur Abkürzung

$$\alpha = 1 - \frac{s_a}{r_a},$$

$$\beta = 1 - \frac{s_b}{r_b},$$

so wird

$$\delta_0 = \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} \arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right). \tag{13}$$

Stellt man einen Napf, etwa den von Contact b, so hoch, dass Stift und Quecksilber sich im Schwingungscentrum treffen und trennen, so ist

$$s_b = r_b, \quad \beta = 0.$$

Folglich wird

$$\delta_0 = \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} \arcsin\left(1 - \frac{s_a}{r_a}\right).$$

2. Fall. Zwei Strombahnen enthalten die Contacte a und c. Die Schwingungen der Platinstifte unterscheiden sich in den Phasen um 180^0.

Man erhält die Phasendifferenz, indem man die Zinken einer Stimmgabel oder die Enden eines zweiarmigen, in Schwingungen zu versetzenden Hebels als Stiftträger benutzt.

Tritt eine derartige Vorrichtung an die Stelle des Bügels B in der Fig. 1, so ist bei der Einstellung der Contacte dafür zu sorgen, dass die Leitung von der Kette zum Condensator geschlossen gehalten wird, während diejenige vom Condensator nach dem Galvanometer unterbrochen ist, und so umgekehrt. Das wird immer geschehen, falls die Stellungen der Näpfe die Bedingung

$$\vartheta_a + \vartheta_c < \mathfrak{T} \quad \text{oder} \quad s_a + s_c < r_a + r_c$$

erfüllen.

Uebergreifende Contacte. In den Fällen 1 und 2 bezieht sich die Zeitmessung auf Intervalle, in welchen die Spitze des Platinstiftes den Umkehrpunkt im Quecksilber enthaltende Amplitudenstücke durchläuft. Da die Spitze die grösste Geschwindigkeit im Schwingungscentrum erlangt, so ist es zum Gebrauch kleiner Zeiträume zweckmässig, ebenso wie bei dem Pendelunterbrecher, Amplitudenstücke zur Verfügung zu haben, auf denen das Schwingungscentrum liegt oder Stücke aus der Nähe derselben. Lässt dieses sich mit Rayleigh'schen Contacten auch erreichen?

Die erwähnten Amplitudenstücke sind verfügbar, wenn man in die Stromleitung zwei Contacte einschaltet, sodass die Stifte mit einem Phasenunterschiede von 180° schwingen, wie im Fall 2, den Quecksilbernäpfen giebt man aber Stellungen, denen zufolge die Stiftspitzen eine gewisse Zeit hindurch sich gleichzeitig im Quecksilber bewegen müssen.

Sind die gewählten Contacte a und c, so ist die Bedingung für die erforderlichen Stellungen

$$\vartheta_a + \vartheta_c > \mathfrak{T} \quad \text{oder} \quad s_a + s_c > r_a + r_c.$$

Für die Dauer δ_π der übergreifenden Contacte erhält man im Verlauf einer halben Schwingung des Stiftträgers, wenn

$$\mathfrak{a} = -1 + \frac{s_a}{r_a},$$

$$\mathfrak{c} = -1 + \frac{s_c}{r_c}$$

gesetzt wird,

$$\delta_\pi = \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} \operatorname{arc\,sin}\left(\mathfrak{a}\sqrt{1-\mathfrak{c}^2} - \mathfrak{c}\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\right). \tag{14}$$

Der Ausdruck hat dieselbe Form wie derjenige δ_0, wenn die Schwingungen der Platinstifte den Phasenunterschied Null haben. Nimmt man

$$s_c = r_c,$$

so vereinfacht sich auch wieder das Argument des Arcussinus.

Der Gebrauch übergreifender Contacte führt zu den weiteren Combinationen:

3. Fall. Ein gewöhnlicher Contact in der einen, zwei übergreifende Contacte in der anderen Strombahn.

4. Fall. In jeder von zwei Strombahnen übergreifende Contacte.

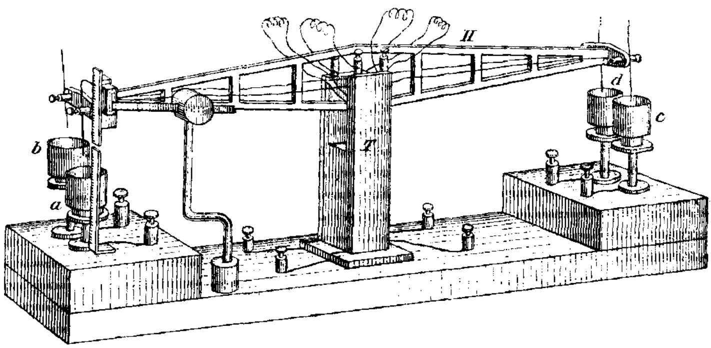

Fig. 5.

Die Formeln zur Einstellung der Näpfe ergeben sich aus (11), (13) und (14) und brauchen an dieser Stelle wohl nicht weiter erwähnt zu werden.

Der Hebelunterbrecher. Einen Unterbrecher mit Hülfe eines zweiarmigen Hebels habe ich für die Versuche dieser Arbeit zusammengestellt. Die Fig. 5 veranschaulicht die wesentlichen Bestandtheile der Hebelvorrichtung.

Auf einem Grundbrett steht ein fester, oben ausgeschnittener Träger T, welcher in den Ausschnitt das auf einer dünnen Axe bewegliche Hebelstück H aufnimmt. Das Stück war aus einem trockenen Fichtenbrett von etwa 5 mm Dicke ausgesägt; die aus der Zeichnung ersichtliche Form hat es erhalten aus Rücksicht auf Stabilität und geringes Gewicht. Die eine Eigenschaft ist nothwendig zur Vermeidung von Eigenschwingungen, die andere erleichtert den Betrieb.

An den Enden des Hebels sind Querstäbchen angebracht, und darin je zwei leichte Doppelklemmschrauben befestigt. Einerseits halten die Klemmschrauben die Platinstifte, andererseits geht von jeder von ihnen eine Leitung an H entlang bis zur Drehungsaxe, von da durch einen federnden Draht nach dem Träger und daran herab, um auf dem Grundbrett zu enden.

Unter den Platinstiften befinden sich auf Stellschrauben die Quecksilbernäpfe, und es entstehen so die vier Contacte a, b, c, d von der in Fig. 4 bereits auseinandergesetzten Einrichtung. Von den Verticalscalen ist in der Fig. 5 nur die zum Contact a gehörende gezeichnet. Ich habe dieselbe zerschnitten und das obere Stück verstellbar angebracht. Denn es erwies sich zur genauen Bestimmung der Amplituden leichter, das Scalenstück passend zu richten, als die Stellung des schwingenden Zeigers zu ändern.

Um den Hebel in Schwingungen zu versetzen, benutzte ich einen gewöhnlichen selbstthätigen Stromunterbrecher mit Quecksilbercontact und einer starken Stahllamelle. Derselbe wurde neben dem Hebelunterbrecher aufgestellt, und das Stück H vermittelst eines eingeschlagenen Stiftes mit der Lamelle in Verbindung gebracht. Zu dem Zwecke war ein prismenförmiges Klötzchen, mit einer Kante nach oben gerichtet, auf der Lamelle befestigt. Ueber die Kante war ein straff gespannter Kautschukschlauch gezogen. Unter den Schlauch geschoben wurde der Stift auf der Kante so gehalten, dass der Hebel die Schwingungen der Lamelle vollständig mitmachte.

Wenn der Hebelunterbrecher im Gange ist, so können für zwei Strombahnen, unterschieden durch I und II, die angeführten Contactcombinationen verwirklicht werden mit folgenden Schaltungen:

1. Fall,	a	in I,	b	in II;
2. „	a	„ I,	c	„ II;
3. „	b	„ I,	a, c	„ II;
4. „	a, c	„ I,	b, d	„ II.

Hieraus, und aus der über den Rayleigh'schen Contact angestellten Betrachtung ergiebt sich, dass der Hebelunterbrecher die Vorrichtungen nach Foucault und du Bois-Reymond, die Saiten- und Stimmgabelapparate, ferner meinen Disjunctor, sodann das Gegenstück des Helmholtz'schen Pendelunterbrechers zur galvanometrischen Beobachtung periodischer Stromstösse in gleichem Maasse übersichtlich und einfach in sich vereinigt.

6. Ausgeführte Bestimmungen der Periodendauer electrischer Schwingungen.

An die Stelle des Bügels *B* in der Fig. 1 wurde der Hebelunterbrecher gesetzt, und die Contactcombination des Falles 2 verwandt; *c* diente als Lade-, *a* als Entladecontact.

Das Galvanometer war ein aperiodisches Spiegelgalvanometer nach Wiedemann, die Dämpfung bewirkte ein Kupferkörper. Der Multiplicator bestand aus fünf Rollen, die mit *A*, *B*, *C*, *D*, *E* bezeichnet werden sollen. Die Rolle *E* hatte wenig Windungen und einen Widerstand von 0,045 Ohm, die vier anderen hatten je 2730 Windungen, davon zwei mit ca. 101 Ohm, zwei mit ca. 100 Ohm Widerstand.

Die Rollen mit grosser Windungszahl wurden als *R* in der Fig. 1 gebraucht und erst alle vier, danach eine von ihnen, sodann zwei eingeschaltet.

Bei allen drei Versuchen benutzte ich die Rolle *E*, um durch sie der Richtung der Entladungsströme entgegengesetzt, einen constanten Strom hindurchzuleiten. Hiermit lenkte ich den Magneten des Galvanometers soweit ab, dass im Fernrohr das Ende der Scala erschien, deren mittlerer Theilstrich 200 die Ruhelage bezeichnete.

Während der Hebelunterbrecher im Gange war, wurde nun der Quecksilbernapf des Entladecontactes langsam gehoben und an der Contactscala die Stelle abgelesen, bei welcher die beginnende Rückwärtsbewegung des Scalenbildes den Eintritt der Berührung von Platinstift und Quecksilber anzeigte. Hiernach wurden bei weiterem Emporheben des Napfes hintereinander dessen Stellungen aufgesucht, bei welchen man im Galvanometer die Umkehrpunkte des Magneten beobachtete.

Bedeuten die Zahlenangaben unter
U die Folgenummern der Umkehrpunkte,
l und r die Scalenablesungen links und rechts,
l_v die jedesmaligen Stellungen des Quecksilbernapfes,
so hatten bei ungeänderter Ladedauer und ungeänderter Capacität des Condensators die mit den 4, 1 und 3 Rollen angestellten Versuche nachstehende Ergebnisse.

I. Rollen $A + B + C + D$.				III. Rollen $C + D$.			
U	l	r	l_v	U	l	r	l_v
Nr. 8	264		26,02	Nr. 10	138		25,64
„ 7		273	24,52	„ 9		141	24,48
„ 6	257		23,32	„ 8	137		23,37
„ 5		284	21,96	„ 7		142	22,66
„ 4	236		20,90	„ 6	134		21,58
„ 3		319	20,08	„ 5		146	20,78
„ 2	183		19,34	„ 4	128		20,00
„ 1		380	18,37	„ 3		156	19,30
„ 0	3		17,65	„ 2	114		18,82
				„ 1		175	18,32
				„ 0	3		17,72

II. Rolle D allein.
Umkehrpunkte nicht beobachtet.

Auf der Contactscala wurde zu Anfang, mehrfach während des Verlaufes und am Schluss der Versuche die Amplitude der Spitze des Platinstiftes bestimmt. Sie hielt sich constant und es waren, wenn der Scalentheil $100\,\lambda = p$ gesetzt wird,

$$2\,r = 16{,}2\,p.$$

Mithin bewirkte die Einschaltung der Rolle D allein keine Schwingungen, sie traten auf bei den Versuchen I und III, und ich zählte bei allen vier Rollen acht, bei den zweien zehn Perioden.

Bezeichnen T_{I} und T_{III} die Dauer, so folgt aus den Anfangs- und Endstellungen des Quecksilbernapfes in I und III zunächst

Anzahl der Perioden	Halber Weg s im Quecksilber	$\arccos\left(1 - \frac{s}{r}\right)$
$8\ T_{\mathrm{I}}$	$8{,}37\,p$	$91^0\,54'\,37''$
$10\ T_{\mathrm{III}}$	7,92	88 43 36

Die zur Berechnung der T noch erforderliche Schwingungszahl des Hebelunterbrechers verglich ich graphisch mit derjenigen einer Stimmgabel. Ich erhielt 20,76 Schwingungen in der Secunde oder

$$\mathfrak{T} = 0{,}04817 \text{ sec.}$$

Folglich ist

$$T_{\mathrm{I}} = \frac{91^0\,54'\,37''}{180^0}\,\frac{0{,}04817}{8}\text{ sec} = 0{,}00307 \text{ sec},$$

$$T_{\mathrm{III}} = \frac{88^0\,43'\,36''}{180^0}\,\frac{0{,}04817}{10}\text{ sec} = 0{,}00237 \text{ sec.}$$

Daher ist das Gesammtresultat:

Versuche	Eingeschaltete Rollen	Beobachtet
I	$A + B + C + D$	$T_{\mathrm{I}} = 0{,}00307$ sec,
II	D	keine Schwingungen,
III	$C + D$	$T_{\mathrm{III}} = 0{,}00237$ sec.

Dasselbe steht mit der Theorie in gutem Einklang. Den Selbstinductionscoefficienten p der Entladeleitung stellen hauptsächlich die Rollen des Galvanometers dar. Erinnert man sich des Ausdruckes für die Schwingungsdauer, so ist mit grosser Annäherung

$$T \text{ proportional } \sqrt{p}.$$

Daher müssen, weil die Rollen nahezu dieselben electrischen Constanten hatten, alle vier eine grössere Schwingungsdauer ergeben, als zwei. In Uebereinstimmung damit ist T_{III} kleiner ausgefallen, als T_{I}.

Zur Entstehung von Schwingungen musste weiter $\frac{1}{2}w < \sqrt{p/c}$ sein. Durch die Einschaltung der einen Rolle D allein dagegen war p zu klein geworden, als dass diese Ungleichung noch erfüllt gewesen wäre. Infolgedessen hat sich bei dem Versuch II die Entladung des Condensators in Schwingungen nicht vollzogen.

Mit dem Vorstehenden ist das Wesentliche dės über die Bestimmung der Periodendauer zu Sagenden erledigt. Was die Aufnahme der vollständigen Schwingungscurve anlangt, so folgt bei gutem Gange des Hebelunterbrechers der Magnet dem Heben und Senken des Quecksilbernapfes so genau, dass sich das mit dem Fernrohr gesehene Scalenbild vor dem Fadenkreuz so hin- und herschieben lässt, wie ein beweglicher Maassstab vor einem festen Zeiger. Werden demnach zu verschiedenen Zeiten ϑ auch andere galvanometrische Ablenkungen notirt, als gerade die Umkehrstellen des Magneten, so ergeben sich alsbald beliebig viele Curvenpunkte. Man wird dadurch in den Stand gesetzt, je nach der Dauer der Periode kürzere oder längere Wellenzüge hinzuzeichnen.

Bei den Beobachtungen in I und III bin ich indessen vorläufig bei der Bestimmung der Periodendauer stehen geblieben aus einem Anlass, der selbstverständlich ist, aber erwähnt werden soll.

Berechnet man T_{I} mit Hülfe der Anfangs- und Endstellungen des Quecksilbernapfes für 7, 6, 5 . . ., desgleichen T_{III} für 9, 8, 7 . . . Perioden, so ergeben die Reihen beide eine Zunahme der Dauer. So folgt aus I

Perioden	$r - s$	$\arccos\left(1 - \frac{s}{r}\right)$	T_{I}
8	− 0,27	91°54′ 37″	0,00 307 sec
7	+ 1,23	81 15 56	0,00 311
6	+ 2,43	72 32 33	0,00 324
5	+ 3,79	62 6 7	0,00 332

Diese Zunahme rührt her von Nebenumständen, welche verhindern, dass die Spitze des Platinstiftes die durch die einfache Gleichung $x'' + c^2 x = 0$ bestimmte Bewegung mit aller Strenge ausführt. Es bietet das Quecksilber dem eindringenden Stifte einen nicht unbedeutenden Widerstand dar, daneben dürfte der zeitliche Verlauf der Magnetisirung des Eisenkernes vom Electromagneten, welcher den Hebelunterbrecher treibt, in Betracht kommen. Die Wirkung jener Umstände wird sich experimentell durch Wahl einer Lamelle von möglichst hohem Gewicht reduciren, ausserdem beobachten und durch Correction in Rechnung ziehen lassen.

Die mitgetheilten Versuche habe ich in dem physikalischen Laboratorium in Bonn angestellt. Hr. Prof. Kayser hatte die Freundlichkeit die nothwendigen Mittel zur Verfügung zu stellen. Ich nehme Veranlassung hierfür ergebenst vielen Dank auszusprechen.

Köln, den 30. December 1897.

(Eingegangen 28. Januar 1898.)