

I. *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird;*
von G. Kirchhoff.

Ist ein System von n Drähten: 1, 2... n gegeben, welche auf eine beliebige Weise unter einander verbunden sind, und hat in einem jeden derselben eine beliebige elektromotorische Kraft ihren Sitz, so findet man zur Bestimmung der Intensitäten der Ströme, von welchen die Drähte durchflossen werden, $I_1, I_2 \dots I_n$, die nöthige Anzahl linearer Gleichungen durch Benutzung der beiden folgenden Sätze ¹⁾:

I. Wenn die Drähte k_1, k_2, \dots eine geschlossene Figur bilden, und w_k bezeichnet den Widerstand des Drahtes k , E_k die elektromotorische Kraft, die in demselben ihren Sitz hat, nach derselben Richtung positiv gerechnet als I_k , so ist, falls I_{k1}, I_{k2}, \dots alle nach *einer* Richtung als positiv gerechnet werden:

$$w_{k1} I_{k1} + w_{k2} I_{k2} + \dots = E_{k1} + E_{k2} + \dots$$

II. Wenn die Drähte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ in einem Punkte zusammenstoßen, und $I_{\lambda 1}, I_{\lambda 2}, \dots$ alle nach diesem Punkte zu als positiv gerechnet werden, so ist:

$$I_{\lambda 1} + I_{\lambda 2} + \dots = 0.$$

Ich will jetzt beweisen, daß die Auflösungen der Gleichungen, welche man durch Anwendung dieser Sätze für $I_1, I_2 \dots I_n$ erhält, vorausgesetzt, daß das gegebene System von Drähten nicht in mehrere völlig von einander getrennte zerfällt, sich folgendermaßen allgemein angeben lassen:

Es sey m die Anzahl der vorhandenen Kreuzungspunkte, d. h. der Punkte, in denen zwei oder mehrere Drähte zusammenstoßen, und es sey $\mu = n - m + 1$, dann ist

1) Bd. 64, S. 513 dieser Annalen.

der gemeinschaftliche Nenner aller Gröſſen I die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2, \dots w_n$ zu je μ Elementen, $w_{k_1} \cdot w_{k_2} \dots w_{k_\mu}$, welche die Eigenschaft haben, daſs nach Fortnahme der Drähte $k_1, k_2, \dots k_\mu$ keine geschlossene Figur übrig bleibt,

und es ist der Zähler von I_λ die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2 \dots w_n$ zu je $\mu - 1$ Elementen, $w_{k_1} \cdot w_{k_2} \dots w_{k_{\mu-1}}$, welche die Eigenschaft haben, daſs nach Fortnahme von $k_1, k_2, \dots k_{\mu-1}$, eine geschlossene Figur übrig bleibt, und daſs in dieser λ vorkommt; eine jede Combination multiplicirt mit der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sich auf der zugehörigen geschlossenen Figur befinden. Die elektromotorischen Kräfte sind hierbei in der Richtung als positiv zu rechnen, in der I_λ als positiv gerechnet ist.

Der leichteren Uebersicht wegen will ich den Beweis, den ich von diesem Satze gebe, in einzelne Abschnitte theilen.

1.

Es sey μ die Zahl, welche angiebt, wie viele Drähte man bei einem beliebigen Systeme *wenigstens* entfernen muſs, damit alle geschlossenen Figuren zerstört werden; dann ist μ auch die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche man durch Anwendung des Satzes I herleiten kann.

Es lassen sich nämlich μ Gleichungen, die von einander unabhängig sind, und aus denen eine jede, die aus dem Satze I folgt, abgeleitet werden kann, auf die folgende Weise aufstellen:

Es seyen 1, 2, $\dots \mu - 1$, μ solche μ Drähte, nach deren Fortnahme keine geschlossene Figur übrig bleibt; nach Fortnahme von $\mu - 1$ derselben bleibt dann *eine* geschlossene Figur; auf die geschlossenen Figuren, welche der Reihe nach übrig bleiben, wenn man

$$\begin{array}{l} 2, 3, \dots \mu \\ 1, 3, \dots \mu \\ \dots \dots \dots \\ 1, 2, 3 \dots \mu - 1 \end{array}$$

entfernt, wende man den Satz I an.

Von den auf diese Weise gebildeten μ Gleichungen kann keine eine Folge der übrigen seyn, weil eine jede eine Unbekannte enthält, welche in allen übrigen nicht vorkommt; die erste allein enthält I_1 , die zweite I_2 u. s. f. Aus diesen Gleichungen läßt sich aber auch eine jede andere bilden, die mit Hülfe des Satzes I abgeleitet werden kann; denn eine Gleichung, die aus einer geschlossenen Figur folgt, welche sich aus mehreren zusammensetzen läßt, muß aus den Gleichungen, die aus diesen folgen (durch Addition oder Subtraction), gebildet werden können; und, wie wir zeigen wollen, kann eine jede geschlossene Figur aus jenen μ Figuren zusammengesetzt werden. Die sämtlichen geschlossenen Figuren nämlich des gegebenen Systems, welches wir durch S bezeichnen wollen, lassen sich einteilen, in solche, in denen der Draht μ vorkommt, und in solche, die in dem Systeme S' enthalten sind, welches aus S entsteht, wenn der Draht μ entfernt wird. Nehmen wir an, daß alle Figuren, welche der zweiten Klasse angehören, sich aus den $\mu - 1$ ersten jener μ Figuren zusammensetzen lassen, so sehen wir ein, daß eine jede Figur des Systems S' sich aus diesen μ zusammensetzen lassen muß; denn eine beliebige Figur, in der der Draht μ vorkommt, läßt sich zusammensetzen aus einer bestimmten, in der μ vorkommt, und aus solchen, in denen μ nicht vorkommt. Die über das System S' gemachte Annahme läßt sich aber wieder auf eine ähnliche in Bezug auf S'' zurückführen, wenn S'' das System ist, welches aus S durch Entfernung von μ und $\mu - 1$ entsteht; nämlich auf die Annahme, daß alle in S'' vorkommenden geschlossenen Figuren sich aus den $\mu - 2$ ersten jener μ zusammensetzen lassen. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise kommen wir endlich auf das System $S^{(\mu-1)}$; da dieses nur eine geschlossene Figur enthält, so ist die Richtigkeit der Annahme, welche wir in Bezug auf dieses machen müssen, um die Wahrheit unserer Behauptung einzusehen, von selbst klar.

2.

Da die Sätze I und II die zur Bestimmung von $I_1, I_2 \dots I_n$

nöthige Anzahl von Gleichungen liefern müssen, so werden diese, nach dem, was wir eben bewiesen haben, die folgenden seyn:

$$\alpha_1^1 w_1 I_1 + \alpha_2^1 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^1 w_n I_n = \alpha_1^1 E_1 + \alpha_2^1 E_2 + \dots + \alpha_n^1 E_n$$

$$\alpha_1^2 w_1 I_1 + \alpha_2^2 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^2 w_n I_n = \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \dots + \alpha_n^2 E_n$$

.....

$$\alpha_1^\mu w_1 I_1 + \alpha_2^\mu w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^\mu w_n I_n = \alpha_1^\mu E_1 + \alpha_2^\mu E_2 + \dots + \alpha_n^\mu E_n$$

$$\alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+1} I_n = 0$$

$$\alpha_1^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+2} I_n = 0$$

.....

$$\alpha_1^n I_1 + \alpha_2^n I_2 + \dots + \alpha_n^n I_n = 0$$

wo die Größen α theils $+1$, theils -1 , theils 0 sind, und wo μ dieselbe Bedeutung als vorher hat.

Es geht hieraus hervor, daß der gemeinschaftliche Nenner der Größen I , d. h. die Determinante dieser Gleichungen, eine homogene Function des μ ten Grades von w_1, w_2, \dots, w_n ist, welche ein jedes einzelne w nur linear und außer den w 's nur Zahlen enthält. Dieses Resultat können wir auch auf die folgende Weise aussprechen: der gemeinschaftliche Nenner der I s ist die Summe der Combinationen von w_1, w_2, \dots, w_n zu je μ Elementen, eine jede Combination mit einem Zahlencoefficienten multiplicirt. Eben so sieht man ein, daß der Zähler eines jeden I die Summe der Combinationen von w_1, w_2, \dots, w_n zu je $\mu - 1$ ist, eine jede Combination mit einer linearen homogenen Function der Größen E_1, E_2, \dots, E_n multiplicirt, deren Coefficienten Zahlen sind.

3.

Zur Bestimmung der Zahlencoefficienten des Nenners und der Zähler der Größen I führt die Bemerkung, daß

es einerlei ist, ob wir den Widerstand $w_x = \infty$ machen, oder ob wir den Draht x durchschneiden oder entfernen; dafs also die Ausdrücke der I 's durch die Substitution $w_x = \infty$ in die Auflösungen derjenigen Gleichungen übergehen müssen, die wir durch Anwendung der Sätze I und II auf das System von Drähten erhalten, welches aus dem gegebenen entsteht, wenn wir den Draht x entfernen. I_x selbst mufs für $w_x = \infty$ verschwinden.

Wir wollen die Zähler und Nenner der I 's durch $w_1 \cdot w_2 \dots w_{\mu-1}$ dividiren, und dann $w_1 = \infty, w_2 = \infty \dots w_{\mu-1} = \infty$ setzen; dadurch gehe I_λ in (I_λ) über; bezeichnen wir dann die Function der E 's, welche im Zähler von I_λ mit

$$w_{x1} \cdot w_{x2} \dots w_{x\mu-1}$$

multiplirt ist, durch $A_{x1, x2, \dots, x\mu-1}^\lambda$ und den Coëfficienten von $w_{x1} \cdot w_{x2} \dots w_{x\mu}$ im Nenner durch $a_{x1, x2, \dots, x\mu}$, so haben wir:

$$(I_\lambda) = \frac{A_{1, 2, \dots, \mu-1}^\lambda}{a_{1, 2, \dots, \mu-1, \mu} w_\mu + a_{1, 2, \dots, \mu-1, \mu+1} w_{\mu+1} + \dots + a_{1, 2, \dots, \mu-1, n} w_n}$$

Der vorangeschickten Bemerkung zufolge ist, wenn λ unter $1, 2 \dots \mu-1$ vorkommt:

$$(I_\lambda) = 0,$$

und, wenn λ nicht unter $1, 2 \dots \mu-1$ vorkommt:

$$(I_\lambda) = I'_\lambda,$$

wo I'_λ die Intensität des Stromes bezeichnet, von dem der Draht λ durchflossen wird, wenn die Drähte $1, 2 \dots \mu-1$ entfernt sind.

Wir denken uns die Gleichungen aufgestellt, die sich durch Anwendung der Sätze I und II auf das übriggebliebene Drahtsystem zur Bestimmung von $I'_\mu, I'_{\mu+1}, \dots, I'_n$ ergeben. Der Satz I liefere hier μ' von einander unabhängige Gleichungen; dann ist der gemeinschaftliche Nenner der Gröfsen I' eine Function des μ' ten Grades von $w_\mu, w_{\mu+1}, \dots, w_n$, und die Zähler derselben sind Functionen des $\mu'-1$ ten Grades in Bezug auf dieselben Argumente. Wegen der Definition von μ ist μ' entweder $= 1$ oder > 1 . Ist $\mu' > 1$, so müssen, damit die Gleichung

$(I_\lambda) = I'_\lambda$ bestehen kann, entweder Zähler und Nenner von I'_λ einen gemeinschaftlichen Factor des $\mu' - 1$ ten Grades in Bezug auf $w_\mu, w_{\mu+1} \dots$ haben, oder es muſs $(I_\lambda) = 0$ und $I'_\lambda = 0$ seyn, oder endlich, es muſs (I_λ) die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Stellt sich eine der Gröſſen (I) unter der Form $\frac{0}{0}$ dar, so müſſen alle unter derselben erscheinen, da sie einen gemeinschaftlichen Nenner haben, und keine ∞ werden darf. Soll dieser Fall nicht eintreten, so müſſen bei einem jeden I' Nenner und Zähler einen gemeinschaftlichen Factor des $\mu' - 1$ ten Grades haben; und zwar müſſen diese Factoren bei allen Gröſſen I' dieselben seyn. Dieses ist aber unmöglich, wie man auf die folgende Weise zeigen kann.

Wir nehmen an, es gäbe einen Factor der bezeichneten Art, welcher die Gröſſe w_x enthalte; x muſs dann ein Draht seyn, welcher in einer geschlossenen Figur liegt, weil im anderen Falle w_x in den Gleichungen für $I_\mu, I_{\mu'}, \dots$ gar nicht vorkommen könnte. Da die Zähler und der Nenner der Gröſſen I' linear in Bezug auf ein jedes w sind, so erhalten wir für diese durch Forthebung jenes Factors Ausdrücke, welche frei von w_x sind. Substituiren wir dieselben in eine der Gleichungen, welche $w_x I'_x$ enthält, so wird diese eine identische; durch partielle Differentiation derselben nach w_x erhalten wir:

$$I'_x = 0.$$

Diese Gleichung kann aber unmöglich immer gelten; sollte dieses der Fall seyn, so müſte sie auch richtig bleiben, wenn man beliebig viele der Gröſſen $w \infty$ setzt, d. h. wenn man beliebig viele der Drähte entfernt; entfernt man aber so viele Drähte, daſs nur *eine* geschlossene Figur übrig bleibt, in welcher x liegt, so kann unmöglich I'_x für beliebige Werthe der Gröſſe E verschwinden.

Wir sehen hiernach ein, daſs, wenn $\mu' > 1$ ist, sich $(I_\mu), (I_{\mu+1}) \dots (I_n)$ unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellen müſſen;

oder, da wir $(I_1) = 0$, $(I_2) = 0 \dots (I_{\mu-1}) = 0$ gefunden haben, dafs, wenn nach Fortnahme der Drähte 1, 2, ... $\mu-1$ mehr als eine geschlossene Figur bleibt, das Product

$$w_1 \cdot w_2 \dots w_{\mu-1}$$

weder in einem Zähler noch in dem Nenner der Gröfsen $I_1, I_2, \dots I_n$ vorkommen kann.

4.

Jetzt wollen wir die Factoren zu bestimmen suchen, mit denen das Product $w_1 \cdot w_2 \dots w_{\mu-1}$ in den Zählern und in dem Nenner der I 's multiplicirt vorkommt, wenn die Bedingung erfüllt wird, dafs nach Fortnahme von 1, 2, ... $\mu-1$ nur eine geschlossene Figur übrig bleibt.

Es enthalte die übrigbleibende Figur die Drähte: $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\nu$; dann ist, falls λ nicht unter diesen vorkommt:

$$I'_\lambda = 0,$$

und falls λ unter denselben vorkommt:

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_\nu}}{w_{\lambda_1} + w_{\lambda_2} + \dots + w_{\lambda_\nu}},$$

wobei $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots$ nach der Richtung als positiv gerechnet sind, nach welcher I_λ als positiv gerechnet ist.

Der Nenner dieses Werthes kann sich von dem Nenner der Gröfse (I_λ) , d. h. von dem Ausdrucke:

$a_{1, 2, \dots \mu-1, \mu} w_\mu + a_{1, 2, \dots \mu-1, \mu+1} w_{\mu+1} + \dots + a_{1, 2, \dots \mu-1, n} w_n$
 nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden; daher müssen von den Gröfsen $a_{1, 2, \dots \mu-1, \mu}, a_{1, 2, \dots \mu-1, \mu+1}, \dots$ alle verschwinden aufser:

$$a_{1, 2, \dots \mu-1, \lambda_1} \quad a_{1, 2, \dots \mu-1, \lambda_2} \quad \dots \quad a_{1, 2, \dots \mu-1, \lambda_\nu}$$

und diese müssen einander gleich seyn. Wir schliesen daraus, dafs der Coëfficient der Combination $w_{x_1} \cdot w_{x_2} \dots w_{x_\mu}$ im Nenner der Gröfsen I nur dann von 0 verschieden seyn kann, wenn durch Fortnahme der Drähte $x_1, x_2, \dots x_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört werden; und, dafs alle Combinationen, welche diese Bedingung erfüllen, und welche $\mu-1$ gemeinschaftliche Factoren w enthalten, denselben Coëfficienten haben müssen.

Mit Hülfe hiervon läfst sich beweisen, dafs irgend zwei Combinationen

$$w_{x_1} \cdot w_{x_2} \dots w_{x_\mu} \text{ und } w_{x'_1} \cdot w_{x'_2} \dots w_{x'_\mu}$$

im Nenner der I 's denselben Coëfficienten haben müssen, wenn durch Entfernung sowohl der Drähte $x_1, x_2 \dots x_\mu$ als der Drähte $x'_1, x'_2, \dots x'_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört werden.

Um diesen Beweis führen zu können, schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus:

Durch Fortnahme der Drähte $x_1, x_2, \dots x_\mu$ mögen alle geschlossenen Figuren zerstört werden; dann muß ein jeder dieser Drähte wenigstens in einer geschlossenen Figur vorkommen.

In einer jeden geschlossenen Figur muß aber auch wenigstens einer jener Drähte vorkommen; wissen wir also von dem Drahte x' , daß er in einer geschlossenen Figur liegt, so muß dieser wenigstens mit einem der Drähte $x_1, x_2 \dots x_\mu$ in derselben geschlossenen Figur liegen.

Ferner muß ein jeder der Drähte $x_1, x_2, \dots x_\mu$ in einer geschlossenen Figur vorkommen, in der die $\mu - 1$ anderen Drähte nicht vorkommen, x_μ z. B. in derjenigen, welche nach Fortnahme von $x_1, x_2, \dots x_{\mu-1}$ übrig bleibt, und welche wir durch f_{x_μ} bezeichnen wollen. Liegt in f_{x_μ} auch der Draht x'_μ , so werden auch durch Fortnahme von $x_1, x_2 \dots x_{\mu-1}, x'_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört. Mit Hülfe dieser Bemerkung sieht man leicht ein, daß, wenn wir irgend eine geschlossene Figur, f , auswählen, sich immer $\mu - 1$ Drähte von der Art finden lassen, daß nach Fortnahme derselben f als einzige geschlossene Figur übrig bleibt. Kommen nämlich in f von den Drähten $x_1, x_2, \dots x_\mu$ etwa x_1, x_2, x_3 vor, und ist x'_2 ein Draht, der in f_{x_2} , aber nicht in f , und x'_3 ein Draht, der in f_{x_3} , aber auch nicht in f vorkommt, so sind $x'_2, x'_3, x_4 \dots x_\mu$ Drähte der verlangten Art.

Jenen Beweis wollen wir jetzt auf die Weise führen, daß wir annehmen, die Coëfficienten zweier Combinationen der bezeichneten Art seyen einander gleich, wenn diese ν gemeinschaftliche Factoren w haben, und beweisen, daß dann auch die Coëfficienten zweier Combinationen,

welche nur $\nu - 1$ gemeinschaftliche Factoren haben, einander gleich seyn müssen. Ist uns dieses gelungen, so werden wir die Wahrheit der aufgestellten Behauptung dargethan haben.

Die Art des Beweises bleibt dieselbe, welchen Werth für ν wir auch setzen; wir wollen denselben daher nur für einen Werth von ν , für $\nu = 3$ durchführen. Wir wollen also beweisen, dafs die beiden Combinationen:

$$w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x_3} \dots w_{x_\mu} \text{ und } w_{x'_1} \cdot w_{x'_2} \cdot w_{x'_3} \dots w_{x'_\mu}$$

denselben Coëfficienten haben müssen.

In dem Systeme von Drähten, welches aus dem gegebenen entsteht, wenn man x_1 und x_2 entfernt, können alle geschlossenen Figuren nicht durch die Fortnahme von weniger als $\mu - 2$ Drähten zerstört werden; sie werden zerstört durch die Fortnahme von $x_3, x_4 \dots x_\mu$, und durch die Fortnahme von $x'_3, x'_4 \dots x'_\mu$; hieraus folgt, dafs x'_3 wenigstens mit einem der Drähte $x_3, x_4 \dots x_\mu$, wir nehmen an mit x_3 , in derselben geschlossenen Figur liegt; diese bleibe als einzige übrig, wenn man $x'_4, x'_5 \dots x'_\mu$ entfernt; dieselbe bleibt dann von dem ursprünglichen Systeme als einzige übrig, wenn man $x_1, x_2, x'_4, x'_5 \dots x'_\mu$ entfernt. Es folgt hieraus, dafs die beiden Combinationen:

$$w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x_3} \cdot w_{x''_4} \cdot w_{x''_5} \dots w_{x''_\mu}$$

und

$$w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x'_3} \cdot w_{x''_4} \cdot w_{x''_5} \dots w_{x''_\mu},$$

welche $\mu - 1$ gemeinschaftliche Factoren w haben, denselben Coëfficienten haben müssen. Unserer Annahme zufolge haben aber auch die Combinationen:

$$w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x_3} \cdot w_{x_4} \dots w_{x_\mu} \text{ und } w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x_3} \cdot w_{x''_4} \dots w_{x''_\mu}$$

$$w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x'_3} \cdot w_{x'_4} \dots w_{x'_\mu} \text{ und } w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x_3} \cdot w_{x''_4} \dots w_{x''_\mu}$$

paarweise denselben Coëfficienten; es sind also auch die Coëfficienten von

$$w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x_3} \dots w_{x_\mu} \text{ und } w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot w_{x'_3} \dots w_{x'_\mu}$$

einander gleich.

Wir haben hierdurch bewiesen, dafs der gemeinschaftliche Nenner der I 's die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2, \dots w_n$ zu je μ Elementen, $w_{x_1} \cdot w_{x_2} \dots w_{x_\mu}$ ist,

welche die Eigenschaft haben, daß nach Fortnahme der Drähte x_1, x_2, \dots, x_μ keine geschlossene Figur übrig bleibt; diese Summe mit einem Zahlencoefficienten multiplicirt. Den Zahlencoefficienten können wir $=1$ setzen, wenn wir die Zähler der I 's darnach bestimmen.

Diese Zähler lassen sich jetzt sehr leicht finden. Aus den Gleichungen nämlich:

$$(I_\lambda) = 0 \text{ und } (I_\lambda) = I'_\lambda,$$

von denen die erste gilt, wenn $\lambda \leq \mu - 1$, die zweite, wenn $\lambda > \mu - 1$ ist, folgt:

$$A_{1, 2, \dots, \mu-1}^\lambda = E_{\lambda 1} + E_{\lambda 2} + \dots + E_{\lambda \nu}$$

für den Fall, daß λ unter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ vorkommt, und

$$A_{1, 2, \dots, \mu-1}^\lambda = 0$$

für den entgegengesetzten Fall.

Es ist also der Coefficient des Gliedes $w_1.w_2..w_{\mu-1}$ — von welchem wir schon früher gezeigt haben, daß er nur dann von 0 verschieden seyn kann, wenn nach Fortnahme von $1, 2, \dots, \mu - 1$ eine einzige geschlossene Figur übrig bleibt — $= 0$, wenn in dieser Figur λ nicht vorkommt; kommt λ in ihr vor, so ist er $=$ der Summe der elektromotorischen Kräfte, die sich auf derselben befinden; diese nach der Richtung positiv gerechnet, nach welcher I_λ als positiv gerechnet ist.

5.

Wir müssen jetzt noch, um unseren Satz, wie wir ihn ausgesprochen, bewiesen zu haben, zeigen, daß $\mu = n - m + 1$ ist. Diese Behauptung gilt nur, wenn das gegebene Drahtsystem nicht in mehrere, völlig von einander getrennte, zerfällt, während die bis jetzt angestellten Betrachtungen eine solche Voraussetzung nicht erforderten.

Wie wir gesehen haben, ist μ die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche sich mit Hülfe des Satzes I ableiten lassen; die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche der Satz II liefert, muß daher $n - \mu$ seyn. Nun läßt es sich aber zeigen, daß, unter jener Voraussetzung, diese Anzahl $m - 1$ ist; woraus dann $\mu = n - m + 1$ folgt.

Mehr als $m - 1$ von einander unabhängige Gleichungen lassen sich mit Hülfe des Satzes II nicht ableiten; denn wenden wir denselben auf alle m Kreuzungspunkte an, so kommt in den dadurch entstehenden Gleichungen ein jedes I zwei Mal vor, einmal mit dem Coëfficienten $+1$, das andere Mal mit dem Coëfficienten -1 ; die Summe sämtlicher Gleichungen giebt also die identische Gleichung $0 = 0$. Die Gleichungen, welche man durch Anwendung jenes Satzes auf $m - 1$ beliebige Kreuzungspunkte erhält, sind aber von einander unabhängig, denn sie haben die Eigenschaft, dafs, wenn wir beliebige und beliebig viele unter ihnen auswählen, in diesen eine oder einige der Unbekannten nur einmal vorkommen. Nennen wir nämlich die Kreuzungspunkte $1, 2, \dots, m$, einen Draht, durch welchen 2 von ihnen, α und λ , mit einander verbunden sind (α, λ), so kommt in den Gleichungen, welche durch Betrachtung der Punkte x_1, x_2, \dots, x_ν abgeleitet sind, wenn einer derselben, etwa x_1 , aufser mit Punkten, die unter x_2, \dots, x_ν vorkommen, noch mit einem anderen, λ , verbunden ist, die Unbekannte $I_{(\alpha, \lambda)}$ nur einmal vor. Einer der Punkte x_1, x_2, \dots, x_ν mufs aber, aufser mit anderen derselben, noch mit einem Punkte λ verbunden seyn, wenn die Drähte, welche die Punkte x_1, x_2, \dots, x_ν mit einander verbinden, nicht ein in sich abgeschlossenes System bilden.

Es sey mir erlaubt, noch einige Bemerkungen zu dem eben bewiesenen Satze zu machen.

Ordnet man die Glieder des Zählers von I_λ nach den Gröfsen E_1, E_2, \dots, E_n , so wird der Coëfficient von E_x die Summe der, theils positiven, theils negativen, Combinationen von w_1, w_2, \dots, w_n zu je $\mu - 1$, welche im Nenner der I 's sowohl mit w_λ als mit w_x multiplicirt vorkommen; es sind dieses ja gerade die Combinationen $w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot \dots \cdot w_{x_{\mu-1}}$, welche die Eigenschaft haben, dafs nach Fortnahme der Drähte $x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}$ nur eine geschlossene Figur übrig bleibt, und dafs in dieser sowohl λ als x vorkommt; positiv ist $w_{x_1} \cdot w_{x_2} \cdot \dots \cdot w_{x_{\mu-1}}$ zu nehmen, wenn in der übrigblei-

benden Figur die positive Richtung von I_λ mit der Richtung von E_λ zusammenfällt, negativ im entgegengesetzten Falle.

Es geht hieraus unter Anderem hervor, dafs, wenn wir aus einem beliebigen Systeme zwei Drähte auswählen, die Intensität des Stromes, welcher in dem einen hervorgebracht wird durch eine elektromotorische Kraft in dem zweiten, gerade dieselbe ist als die Intensität des Stromes, welcher in dem zweiten hervorgebracht wird durch eine eben so grofse elektromotorische Kraft in dem ersten.

Die Bedingung, welche wir für das Vorkommen einer Combination in dem Nenner der I 's gefunden haben, läfst sich, wie man leicht einsieht, auch auf die folgende Weise aussprechen: die Combination $w_{x1}.w_{x2}...w_{x\mu}$ kommt vor, wenn die Gleichungen, welche der Satz I liefert, unabhängig in Bezug auf $I_{x1}, I_{x2}..., I_{x\mu}$ sind; es läfst sich zeigen, dafs diese Bedingung mit der übereinkommt, dafs es zwischen $I_{x1}, I_{x2}..., I_{x\mu}$, oder einigen dieser Gröfßen, keine Gleichung giebt, welche aus den Gleichungen, die durch Anwendung des Satzes II entstanden sind, abgeleitet werden kann. Diese Bemerkung wird es häufig leichter machen, die Combinationen aufzustellen, welche im Nenner der I 's fehlen. Stofsen z. B. die Drähte 1, 2, 3 in einem Punkte zusammen, 3, 4, 5 in einem zweiten, 5, 6, 7 in einem dritten (wie in Fig. 4, Taf. V), so fehlen alle Combinationen, welche:

$$w_1.w_2.w_3 \quad , \quad w_3.w_4.w_5 \quad , \quad w_5.w_6.w_7$$

$$w_1.w_2.w_4.w_5 \quad , \quad w_3.w_4.w_6.w_7$$

$$w_1.w_2.w_4.w_6.w_7$$

enthalten.

Der Nenner der I 's bei der, in der Figur 5, Taf. V, dargestellten, Combination der Drähte, ist hiernach die Summe aller Combinationen von $w_1, w_2..w_6$ zu je drei Elementen, mit Ausnahme der folgenden:

$$w_1.w_2.w_4 \quad , \quad w_1.w_3.w_5 \quad , \quad w_2.w_3.w_6 \quad , \quad w_4.w_5.w_6.$$