ÜBER DEN ZUSAMMENHANG DER EXTREMEN VON HARMONISCHEN FUNKTIONEN MIT IHREN KOEFFIZIENTEN UND ÜBER DEN PICARD-LANDAU'SCHEN SATZ.

Von **C. Carathéodory** (Breslau) und **L. Fejér** (Kolozsvár).

Adunanza del 26 marzo 1911.

EINLEITUNG.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wie gewisse Eigenschaften von harmonischen und analytischen Funktionen von ihren Koeffizienten abhängen. Die Richtung der Untersuchung wird am besten hervortreten, wenn wir einige der behandelten Fragen schon in der Einleitung besprechen.

Es sei

$$U(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + \bar{a}_n \sin n\vartheta) \tag{1}$$

die Entwickelung einer harmonischen Funktion von zwei Veränderlichen, wobei a_0, a_1, $\bar{a}_1$, ... reelle Konstanten, r und θ Polarkoordinaten bedeuten. Wir nehmen ferner an, dass die Reihe (1) im Kreise $r < R$ (wo R eine positive Zahl bedeutet) konvergiert und dortselbst eine harmonische Funktion darstellt, die wir mit $U(r, \theta)$ bezeichnen. Es sei M die obere und m die untere Grenze von $U(r, \theta)$ für $r < R$. (Es kann auch $M = +\infty$ und $m = -\infty$ sein).

Wir denken uns nun von der Reihe (1) blos die $(2n+1)$ ersten Entwickelungskoeffizienten gegeben — d. h. beliebige Konstanten a_0, a_1, $\bar{a}_1$, ..., a_n, $\bar{a}_n$ vorgeschrieben — und ausserdem den Wert des Radius R. Die übrigen Koeffizienten a_{n+1}, $\bar{a}_{n+1}$, ... ad inf. mögen ganz beliebig, jedoch der Beschränkung unterworfen sein, dass die Reihe (1) mindestens für $r < R$ konvergiere. Dadurch haben wir eine ganz bestimmte Menge von harmonischen Funktionen mit gemeinsamen Anfangskoeffizienten a_0, a_1, $\bar{a}_1$, ..., a_n, $\bar{a}_n$ definiert.

Wir stellen nun das Problem: welches ist das Maximum m^* der unteren Grenze m dieser Funktionen innerhalb des Kreises $r < R$ und welches ist das Minimum M^* der oberen Grenze M dieser Funktionen im selben Bereiche? [1]).

---

[1]) Diese Frage hat L. FEJÉR aufgeworfen und in den folgenden Arbeiten approximativ gelöst: *A* LAPLACE-*féle sorokról* [Mathematikai és természettudományi értesitö, Bd. XXVI (1908), S. 323-373], S. 358-373; *Über die* LAPLACE*sche Reihe* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), S. 76-109], S. 93.

Dieses Problem wird im § 1 der vorliegenden Arbeit in geschlossener Form gelöst.

Eine Art Umkehrung dieses Problems ist das folgende: Wir denken uns für die Reihe (1) wieder blos die $(2n + 1)$ ersten Koeffizienten

$$a_0, \quad a_1, \quad \bar{a}_1, \ldots, a_n, \quad \bar{a}_n$$

gegeben, diesmal aber mit der Beschränkung, dass mindestens eine der Zahlen a_1, $\bar{a}_1, \ldots, a_n, \bar{a}_n$ von Null verschieden sei — sonst wäre das zu fomulierende Problem trivial lösbar. Ferner sei eine Zahl $m^* < a_0$ gegeben; gesucht wird jetzt der grösstmöglichste Wert von R von der Eigenschaft, dass mindestens eine Reihe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\vartheta + \bar{a}_k \sin k\vartheta)$$

mit den gegebenen Anfangskoeffizienten existiert, die für $r < R$ konvergiert und deren untere Grenze m im Gebiete $r < R$ nicht kleiner ist als die gegebene Zahl m^* [2]).

Ein entsprechendes Problem entseht, wenn eine Zahl $M^* > a_0$ gegeben ist und man verlangt, dass für $r < R$ die obere Grenze einer mit den gegebenen Koeffizienten beginnenden Funktion die Zahl M^* nicht übersteigen darf. Diese Probleme sind im § 4 gelöst; dort ist $m^* = 0$ gemacht, was das Problem in seiner Allgemeinheit nicht wesentlich beschränkt.

Nimmt man statt der Schar konzentrischer Kreise eine Schar von ähnlichen und ähnlich gelegenen konvexen Kurven, die alle den Nullpunkt im Inneren enthalten, so kann man analoge Fragen stellen, die im § 6 behandelt sind.

Im § 7 ist das folgende Problem gelöst: Von einer Potenzreihe

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots$$

der komplexen Veränderlichen x seien die $(n+1)$ ersten Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gegeben; die Reihe sei ferner für $|x| < R$ konvergent. Welcher ist der kleinste Wert, den die obere Grenze des absoluten Betrages von $f(x)$ bei beliebiger Wahl der übrigen Koeffizienten für $|x| < R$ annehmen kann?

Die LANDAU'sche Verallgemeinerung des PICARD'schen Problems führt ferner zu folgender Frage, die im § 10 behandelt ist.

Für eine Potenzreihe $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$ der komplexen Veränderlichen x sind die $(n + 1)$ ersten Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gegeben. Es sei $\alpha_0 \neq 0, 1$ und mindestens eine der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sei von Null verschieden. Welches ist der Radius des grössten Kreises mit dem Mittelpunkte $x = 0$ innerhalb dessen die Reihe $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$ konvergiert und eine Funktion darstellt, die von Null und Eins verschieden ist [3])?

---

[2]) Vgl. FEJÉR, loc. cit. [1]).

[3]) Für $n = 2$ ist dieser maximale Radius dessen Existens von LANDAU bewiesen worden war {*Über eine Verallgemeinerung des* PICARD*schen Satzes* [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Jahrgang 1904, S. 1118-1133]}, von CARATHÉODORY {*Sur quelques généralisations du théorème de M.* PICARD [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences

Sind wieder die $(2n+1)$ ersten Koeffizienten einer FOURIER'schen Entwickelung gegeben, so kann man fragen ob es möglich ist eine stetige und stetig differenziierbare Funktion $f(x)$ zu finden, die im Intervalle $0-2\pi$ monoton wächst. Diese Frage wird im § 13 behandelt [4]).

In allen diesen Problemen, die wir angeführt haben, sind entweder die $(2n+1)$ ersten Koeffizienten $a_0, a_1, \bar{a}_1, \ldots, a_n, \bar{a}_n$ der Entwickelung einer harmonischen Funktion bezw. einer FOURIER'schen Reihe oder die $(n+1)$ ersten Koeffizienten α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ einer Potenzreihe der komplexen Variablen x gegeben und es wurde immer nach der Lösung eines gewissen Problems der Maxima oder Minima gefragt. In den §§ 2, 5, 8, und 11 sind nun Probleme gelöst, bei welchen die ganze unendliche Entwickelung einer harmonischen Funktion bezw. einer Potenzreihe gegeben ist. Unter diesen Problemen möge folgendes hier als Beispiel erwähnt sein:

Gegeben sei die unendliche Potenzreihe

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n+\cdots,$$

die einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitze. Es sei $\alpha_0 \neq 0, 1$ und die Funktion $f(x)$ sei nicht konstant. Es soll der Radius R eines Kreises $|x|=R$ bestimmt werden, von der Eigenschaft, dass $f(x)$ für $|x|<R$ regulär und von Null und Eins verschieden sei und auf der Peripherie des Kreises $|x|=R$ entweder eine singuläre Stelle besitze oder einen der Werte 0, 1 annehme.

Dieser Radius wird in unserer Arbeit durch ein stets konvergentes unendliches Verfahren ermittelt: jeder neue Schritt führt zu einem Approximationswerte von R, der zugleich die Lösung eines unserer früheren Probleme der Maxima liefert.

Die Methode auf der sich die Lösung der meisten der oben betrachteten Fragen gründet, ist in der Arbeit von CARATHÉODORY auseinandergesetzt, die in dieser Zeitschrift der vorliegenden vorangeht [5]). Dort wurden folgende Sätze bewiesen:

SATZ I. — *Die harmonische Funktion*

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta+\bar{a}_n\sin n\theta) \tag{2}$$

ist nur dann für $r<1$ regulär und positiv, wenn für jedes n der Punkt des $2n$-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten

$$a_1,\ \bar{a}_1,\ a_2,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ a_n,\ \bar{a}_n$$

(Paris), Bd. CXLI (2. Sem. 1905), S. 1213-1215]} bestimmt worden. Für allgemeines n hat LANDAU ein algebraisches rekurrentes Verfahren angegeben {*Über den* PICARD'*schen Satz* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, LI. Jahrgang (1906), S. 252-318]}.

[4]) Auf die Möglichkeit unsere Methoden auf die Behandlung monotoner (und auch konvexer) Funktionen anzuwenden hat uns Herr TOEPLITZ aufmerksam gemacht.

[5]) CARATHÉODORY, *Über den Variabilitätsbereich der* FOURIER'*schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII (2. Semester 1911), S. 193-217].

im Inneren oder auf der Begrenzung des kleinsten konvexen Körpers K_{2n} liegt, der die geschlossene Kurve enthält, deren Koordinaten in Parameterdarstellung

$$\cos\theta, \quad \sin\theta, \quad \cos 2\theta, \quad \sin 2\theta, \ \dots, \ \cos n\theta, \quad \sin n\theta$$

lauten. Für die Punkte von K_{2n} gelten immer die Ungleichheiten

$$|a_k| \leqq 1, \quad |\bar{a}_k| \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Satz II [6]. — *Führt man die Bezeichnungen ein:*

$$a_k + i\bar{a}_k = \alpha_k, \quad a_k - i\bar{a}_k = \alpha_{-k} \qquad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{-n} & \alpha_{-(n-1)} & \alpha_{-(n-2)} & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix} = D_n(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \tag{4}$$

wo α_0 eine beliebige reelle Grösse bedeutet, so sind die Punkte des Inneren des konvexen Körpers K_{2n} durch die Ungleichheitsbedingungen

$$D_k(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) > 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{5}$$

charakterisiert und die Punkte der Begrenzung von K_{2n} genügen den Bedingungen:

$$\begin{cases} D_k(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \geqq 0 & (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ D_n(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Die Bedingungen (5) und (6) sind mit anderen Worten *notwendig*, damit der Punkt $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n$ im Inneren bezw. auf der Begrenzung von K_{2n} liege; die Bedingungen (5) sind ausserdem *hinreichend*, damit dieser Punkt im *Inneren* von K_{2n} liege.

Der Satz I kann demnach folgendermassen ausgesprochen werden:

Satz III. — *Damit die Reihe (2) für $r < 1$ konvergiere und dortselbst eine positive harmonische Funktion darstelle ist notwendig, dass für jedes n*

$$D_n(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geqq 0$$

sei.

Es gelten ferner folgende Sätze:

Satz IV. — *Stellen die $2n$ gegebenen Grössen $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_n, \bar{a}_n$ die Koordinaten eines Punktes des konvexen Körpers K_{2n} dar, so kann immer mindestens eine Funktion $U(r, \theta)$ gefunden werden, die für $r < 1$ harmonisch und positiv ist und deren Entwickelung (2) mit dem konstanten Gliede $\frac{1}{2}$ und den gegebenen $2n$ Koeffizienten beginnt.*

Satz V. — *Sind unendlich viele Grössen*

$$a_1, \quad \bar{a}_1, \quad a_2, \quad \bar{a}_2, \ \dots, \ a_n, \quad \bar{a}_n, \ \dots \text{ ad inf.}$$

gegeben und ist für jedes n der Punkt mit den Koordinaten $a_1, \bar{a}_1, \dots, a_n, \bar{a}_n$ ein

[6]) Dieser Satz ist von Toeplitz gefunden und uns mitgeteilt worden.

Punkt des konvexen Körpers K_{2n}, *so konvergiert die Reihe* (2) *für* $r < 1$ *und stellt dortselbst eine positive harmonische Funktion dar.*

SATZ VI. — *Sind die Bedingungen des Satzes IV erfüllt, aber jetzt unter der Voraussetzung, dass mindestens eine der Determinanten*

$$D_j(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

den Wert Null hat, so verschwinden auch alle folgenden Determinanten dieser Reihe und es gibt nur EINE *Funktion, die für* $r < 1$ *harmonisch und positiv ist und deren Entwickelung mit den gegebenen Koeffizienten beginnt. Ist* D_p *die erste verschwindende Determinante, so hat diese Funktion die Gestalt*

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varepsilon(\vartheta_j;\ r,\ \vartheta). \tag{7}$$

In dieser Formel bedeuten die λ_j *von Null verschiedene positive Konstanten, deren Summe gleich Eins ist und die* ϑ_j *lauter von einander verschiedene Konstanten, die sämtlich im Intervalle* $0 \leqq \vartheta_j < 2\pi$ *liegen; ferner ist*

$$\varepsilon(\vartheta_j;\ r,\ \vartheta) = \frac{1 - r^2}{2[1 - 2r\cos(\vartheta_j - \vartheta) + r^2]}. \tag{8}$$

I.

Maxima und Minima von harmonischen Funktionen.

1. Es seien die $(2n + 1)$ Konstanten

$$a_0, \quad a_1, \quad \bar{a}_1, \ldots, a_n, \quad \bar{a}_n \tag{9}$$

gegeben; wir betrachten die Gesamtheit der Reihen

$$U(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + \bar{a}_k \sin k\theta) \tag{10}$$

in welchen die $(2n+1)$ ersten koeffizienten, der Reihe nach, mit den gegebenen Zahlen (9) zusammenfallen und die für $r < 1$ konvergieren. Welches ist das Maximum m^* der unteren Grenze der harmonischen Funktionen (10) innerhalb des Einheitskreises, und welches das Minimum M^* der oberen Grenze dieser Funktionen im selben Bereiche?

Zunächst ist klar, dass die fraglichen Maxima und Minima, falls sie überhaupt existieren, zwei endliche Zahlen sein müssen. In der Tat gehört das Polynom

$$P(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos k\theta + \bar{a}_k \sin k\theta)$$

zur Menge der betrachteten Funktionen; es seien μ und M das Minimum und das Maximum dieses Polynoms für $r \leqq 1$; dann ist notwendigerweise

$$\mu \leqq m^* \leqq M^* \leqq \mathrm{M}.$$

Daraus folgt, dass wir bei der Bestimmung von m^* und M^* nur diejenigen harmonischen

Funktionen der Menge (10) zu betrachten haben, welche im Einheitskreise eine *endliche* untere und obere Grenze besitzen.

Wir greifen aus der Menge (10) zwei beliebige Funktionen $U_1(r, \theta)$ und $U_2(r, \theta)$ heraus von denen die erste eine endliche untere und die zweite eine endliche obere Grenze für $r < 1$ besitzen. Es seien m und M zwei Zahlen von denen die erste kleiner als die untere Grenze von $U_1(r, \theta)$ und die zweite grösser als die obere Grenze von $U_2(r, \theta)$ sein möge; es ist sicher $m < a_0 < M$. Dann sind die beiden harmonischen Funktionen

$$(11)\quad \begin{cases} \varphi_1(r, \vartheta) = \dfrac{U_1 - m}{2(a_0 - m)} \\ = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} r^k \left(\dfrac{a_k}{2(a_0 - m)} \cos k\vartheta + \dfrac{\bar{a}_k}{2(a_0 - m)} \sin k\vartheta \right) + \cdots \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi_2(r, \vartheta) = \dfrac{M - U_2}{2(M - a_0)} \\ = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} r^k \left(\dfrac{a_k}{2(a_0 - M)} \cos k\vartheta + \dfrac{\bar{a}_k}{2(a_0 - M)} \sin k\vartheta \right) + \cdots \end{cases}$$

regulär für $r < 1$, positiv und ihr konstantes Glied ist gleich $\frac{1}{2}$.

Die Punkte des $2n$-dimensionalen Raumes

$$\frac{a_1}{2(a_0 - m)}, \quad \frac{\bar{a}_1}{2(a_0 - m)}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{2(a_0 - m)}, \quad \frac{\bar{a}_n}{2(a_0 - m)}$$

und

$$\frac{a_1}{2(a_0 - M)}, \quad \frac{\bar{a}_1}{2(a_0 - M)}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{2(a_0 - M)}, \quad \frac{\bar{a}_n}{2(a_0 - M)}$$

müssen daher nach Satz I der Einleitung beide im Inneren oder auf der Begrenzung des konvexen Körpers K_{2n} liegen.

Bei variablen λ beschreibt der Punkt des R_{2n}

$$(13)\qquad \frac{a_1}{2(a_0 - \lambda)}, \quad \frac{\bar{a}_1}{2(a_0 - \lambda)}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{2(a_0 - \lambda)}, \quad \frac{\bar{a}_n}{2(a_0 - \lambda)}$$

eine Grade; dem Werte $\lambda = \pm\infty$ des Parameters entspricht der Anfangspunkt der Koordinaten, der im Inneren von K_{2n} liegt, dem Werte $\lambda = a_0$ der unendlich ferne Punkt dieser Graden. Lässt man nun λ von $-\infty$ bis a_0 wachsen so beschreibt dieser Punkt vom Anfangspunkt der Koordinaten aus eine Halbgrade, die einen einzigen Punkt mit der Begrenzung von K_{2n} gemeinsam hat; es sei $^*\lambda_n$ der Wert des Parameters für diesen Punkt.

Nach Satz II der Einleitung ist in diesem Punkte

$$D_n\left(1, \frac{a_1 + i\bar{a}_1}{2(a_0 - {}^*\lambda_n)}, \ldots, \frac{a_n + i\bar{a}_n}{2(a_0 - {}^*\lambda_n)}\right) = 0$$

und für jeden Inneren Punkt von K_{2n} d. h. für jedes $\lambda < {}^*\lambda_n$ ist $D_n > 0$. Also muss

${}^*\lambda_n$ mit der algebraisch kleinsten Wurzel von

$$(14)\qquad D_n(2(a_0-\lambda),\ (a_1+i\bar{a}_1),\ \ldots,\ (a_n+i\bar{a}_n))=0$$

zusammenfallen; wir erhalten so die Ungleichheit $m \leqq {}^*\lambda_n$.

Auf ganz analogem Wege würde man finden, dass $M \geqq \lambda_n^*$ ist, wenn man mit λ_n^* die algebraisch grösste Wurzel von (14) bezeichnet.

Ist umgekehrt $m \leqq {}^*\lambda_n$ so kann man, nach Satz IV, eine positive harmonische Funktion $\varphi_1(r, \theta)$ finden, die mit den $(2n+1)$ ersten Gliedern

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} r^k\left(\frac{a_k}{2(a_0-m)}\cos k\vartheta+\frac{\bar{a}_k}{2(a_0-m)}\sin k\vartheta\right)$$

beginnt. Folglich wird die Funktion

$$2(a_0-m)\varphi_1+m$$

mit den $(2n+1)$ vorgeschriebenen Koeffizienten beginnen und ihre untere Grenze wird nicht kleiner als m sein.

Man wird auf analoger Weise, wenn $M \geqq \lambda_n^*$ ist, eine harmonische Funktion konstruieren können, die mit den vorgeschriebenen Koeffizienten beginnt, für $r<1$ regulär ist und deren Maximum nicht grösser als M ist.

Das gesuchte Maximum der unteren Grenze fällt also mit ${}^*\lambda_n$ und das gesuchte Minimum der oberen Grenze mit λ_n^* zusammen. Es ist interessant zu bemerken, dass diese Zahlen *algebraisch* von den gegebenen Grössen a_0, a_1, $\bar{a}_1$, …, a_n, $\bar{a}_n$ abhängen.

Das erhaltene Resultat können wir in folgendem Satze zusammenfassen:

SATZ VII. — *Es sei*

$$(10)\qquad U(r,\vartheta)=a_0+\sum_{r=1}^{\infty} r^k(a_k\cos k\vartheta+\bar{a}_k\sin k\vartheta)$$

eine beliebige Reihe, deren $(2n+1)$ ersten Koeffizienten gegebene Grössen sind und die für $r<1$ konvergiert. Wir betrachten die mit den gegebenen Grössen und einer Unbekannten λ gebildete Gleichung in Determinantenform

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} & D_n(2(a_0-\lambda),\ a_1+i\bar{a}_1,\ \ldots,\ a_n+i\bar{a}_n) \\ &= \begin{vmatrix} 2(a_0-\lambda) & a_1+i\bar{a}_1 & a_2+i\bar{a}_2 & \ldots & a_n+i\bar{a}_n \\ a_1-i\bar{a}_1 & 2(a_0-\lambda) & a_1+i\bar{a}_1 & \ldots & a_{n-1}+i\bar{a}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-i\bar{a}_n & a_{(n-1)}-i\bar{a}_{(n-1)} & \ldots & \ldots & 2(a_0-\lambda) \end{vmatrix}=0. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung hat lauter reelle Wurzeln. Es sei ${}^*\lambda_n$ die kleinste dieser Wurzeln und λ_n^* die grösste unter ihnen. Dann ist die untere Grenze von $U(r, \theta)$ für $r<1$ kleiner als ${}^*\lambda_n$ oder höchstens gleich dieser Grösse und die obere Grenze von $U(r, \theta)$ ist grösser oder gleich λ_n^*. Es gibt zwei wohlbestimmte Funktionen der Menge (10) deren untere bezw. obere Grenze die gefundenen Maximal- oder Minimalwerte wirklich erreichen.

(Der letzte Teil dieses Satzes ist eine Folge von Satz VI der Einleitung).

Im Theoreme VII ist noch das folgende engere Theorem enthalten:

SATZ VIII. — *Es seien für eine im Intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *überall stetige und nach* 2π *periodische Funktion* $f(x)$ *die* $(2n+1)$ *ersten* FOURIER'*schen Konstanten*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\bar{a}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

gegeben. Dann ist das Minimum der Funktion $f(x)$ *kleiner als* ${}^*\lambda_n$ *und ihr Maximum ist grösser als* λ_n^*, *wo* ${}^*\lambda_n$ *und* λ_n^* *die kleinste resp. die grösste Wurzel der mit den gegebenen* FOURIER'*schen Konstanten gebildete Determinantengleichung* (15) *bedeutet. Ist* ε *eine beliebig kleine positive Zahl, so gibt es eine überall stetige nach* 2π *periodische Funktion, welche die gegebenen* $(2n+1)$ *Grössen als erste* FOURIER'*sche Konstanten besitzt und deren Minimum gleich* ${}^*\lambda_n - \varepsilon$ *ist, und ebenso gibt es eine andere Funktion mit denselben Eigenschaften, deren Maximum gleich* $\lambda_n^* + \varepsilon$ *ist.*

2. Es sei jetzt

$$U(r, \theta) = a_0 + \sum r^k (a_k \cos k\theta + \bar{a}_k \sin k\theta) \tag{16}$$

eine beliebige im Inneren des Einheitskreises konvergierende Reihe. Mit $D_n(\lambda)$ bezeichnen wir jetzt die Determinante

$$D_n\big(2(a_0 - \lambda), (a_1 + i\bar{a}_1), \ldots, (a_n + i\bar{a}_n)\big)$$

für ein beliebiges n und mit ${}^*\lambda_n$, λ_n^* die entsprechenden grössten und kleinsten Wurzeln der Gleichungen $D_n(\lambda) = 0$.

Die Folge

$$\lambda_0^* = a_0, \quad \lambda_1^*, \quad \lambda_2^*, \ \ldots, \ \lambda_n^*, \ \ldots \text{ ad inf.}$$

der grössten Wurzeln dieser Gleichung ist dann niemals abnehmend, wie dies aus der soeben auseinandergesetzten Bedeutung dieser Zahlen folgt, und die Folge der kleinsten Wurzeln

$${}^*\lambda_0 = a_0, \quad {}^*\lambda_1, \quad {}^*\lambda_2, \ \ldots, \ {}^*\lambda_n, \ \ldots \text{ ad inf.}$$

ist niemals zunehmend.

Die Folge der nicht abnehmenden λ_n^* besitzt jedenfalls einen Limes λ^*, der unter Umständen auch gleich $+\infty$ sein kann. Wir wollen beweisen, dass λ^* gleich der oberen Grenze der harmonischen Funktion (16) für $r < 1$ ist.

Ist in der Tat λ kleiner als λ^* so gibt es sicher ein $\lambda_N^* > \lambda$ und jede harmonische Funktion deren $(2N+1)$ ersten Koeffizienten mit denen von $U(r, \theta)$ zusammenfallen — also insbesondere $U(r, \theta)$ selbst — wird eine obere Grenze besitzen, die grösser als λ ist.

Ist aber λ^* endlich und die Konstante $\lambda > \lambda^*$, so wird die Funktion $\dfrac{\lambda - U}{2(\lambda - a_0)}$ für jedes n einen geometrischen Representanten besitzen, der dem konvexen Körpers K_{2n} gehört; die Voraussetzungen des Satzes V der Einleitung sind hier erfüllt und es wird demnach

$$\frac{\lambda - U}{2(\lambda - a_0)} \geqq 0$$

sein d. h. die obere Grenze von $U(r, \theta)$ innerhalb des Einheitskreises ist kleiner als λ.

In jedem Falle wird die obere Grenze von $U(r, \theta)$ mit λ^* zusammenfallen.

Auf ganz analogem Wege würde man beweisen, dass die untere Grenze von $U(r, \theta)$ gleich ${}^*\lambda$ ist. Wir fassen dieses Resultat folgendermassen zusammen:

Satz IX. — *Es sei*

$$(16) \qquad U(r, \theta) = a_0 + \sum r^k (a_k \cos k\theta + \bar{a}_k \sin k\theta)$$

eine beliebige Reihe, die für $r < 1$ konvergiert. Ferner seien für jedes ganzahlige n mit ${}^*\lambda_n$ und λ_n^* die kleinste resp. die grösste Wurzel der Gleichung (15)

$$D_n\left(2(a_0 - \lambda), a_1 + i\bar{a}_1, a_2 + i\bar{a}_2, \ldots, a_n + i\bar{a}_n\right) = 0$$

bezeichnet. Dann ist die Folge

$$\lambda_0^* = a_0, \quad \lambda_1^*, \quad \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*, \ldots$$

der grössten Wurzeln nie abnehmend und besitzt einen Limes λ^*, der unter Umständen auch positiv Unendlich sein kann; dieser Limes ist gleich der oberen Grenze der Funktion (16) *für $r < 1$; die Folge der kleinsten Wurzeln*

$${}^*\lambda_0 = a_0, \quad {}^*\lambda_1, \quad {}^*\lambda_2, \ldots, {}^*\lambda_n, \ldots$$

derselben Gleichung ist dagegen nie zunehmend und konvergiert gegen die untere Grenze der harmonischen Funktion (16) *im selben Gebiete.*

Wir könnten hier wieder einen engeren Satz formulieren der uns lehren würde, wie man das Maximum und das Minimum einer im Intervalle $0 - 2\pi$ stetigen Funktion, deren sämtliche Fourier'schen Konstanten gegeben sind, durch einen analogen Grenzprozess bestimmen kann. Das bemerkenswerte in allen diesen Grenzprozessen ist, dass jeder einzelne Schritt zu einem Zahlenwerte führt, der nach den Sätzen VII und VIII die Lösung einer interessanten Extremumsaufgabe liefert.

3. Ferner können wir jetzt folgenden Satz aussprechen:

Satz X. — *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Reihe*

$$a_0 + \sum r^k (a_k \cos k\theta + \bar{a}_k \sin k\theta)$$

für $r < 1$ konvergiere und dortselbst eine harmonische Funktion $U(r, \theta)$ darstelle, deren obere und untere Grenze endlich seien, ist die, dass die im Satze IX definierten Grenzwerte ${}^*\lambda$ und λ^* ebenfalls endliche Zahlen seien.

Dass diese Bedingung notwendig ist, ist eine unmittelbare Folge des vorhergehenden Satzes. Sind umgekehrt ${}^*\lambda$ und λ^* endlich, so ist der Punkt mit den Koordinaten

$$\frac{a_1}{2(a_0 - {}^*\lambda)}, \quad \frac{\bar{a}_1}{2(a_0 - {}^*\lambda)}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{2(a_0 - {}^*\lambda)}, \quad \frac{\bar{a}_n}{2(a_0 - {}^*\lambda)}$$

für jedes n im Inneren oder auf der Begrenzung des Körpers K_{2n} gelegen und folglich sind für jedes k die Zahlen $\frac{a_k}{2(a_0 - {}^*\lambda)}$ und $\frac{\bar{a}_k}{2(a_0 - {}^*\lambda)}$ kleiner als Eins. Die Koeffizienten der gegebenen Reihe sind also sämtlich kleiner als $2(a_0 - {}^*\lambda)$; diese Reihe konvergiert demnach für $r < 1$ und stellt dortselbst eine harmonische Funktion dar. Aus dem Satze IX folgt dann, dass die obere und die untere Grenze dieser Funktion im selben Gebiete endlich sind.

Sind die Bedingungen des Satzes X erfüllt, so stellt nach einem Satze von FATOU [7]) der nicht notwendig konvergente Ausdruck

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + \bar{a}_k \sin k\theta$$

die FOURIER'sche Reihe einer endlichen und im LEBESGUE'schen Sinne integrierbaren Funktion dar. Es ist klar, dass die Bedingungen, dass ${}^*\lambda$ und λ^* endlich seien, nicht nur hinreichens sondern auch notwendig sind, damit dies zutreffe.

II.

Bestimmung von Gebieten in denen eine harmonische Funktion positiv ist.

4. Wir wenden uns nun zur Lösung des folgenden Problems: Es seien die Konstanten

$$a_0, \quad a_1, \quad \bar{a}_1, \quad a_2, \quad \bar{a}_2, \ldots, \quad a_n, \quad \bar{a}_n$$

gegeben, wovon $a_0 > 0$ und mindestens eine der übrigen von Null verschieden sei; es soll der grösste Kreis angegeben werden von der Eigenschaft, dass eine harmonische Funktion existiert, deren ersten $(2n + 1)$ Entwickelungskoeffizienten der Reihe nach mit den gegebenen Zahlen zusammenfallen und die in diesem Kreise regulär und positiv ist.

Es sei β ein positiver Parameter; wir betrachten im $2n$-dimensionalen Raume die Kurve

$$(17) \qquad \frac{a_1}{2a_0}\beta, \quad \frac{\bar{a}_1}{2a_0}\beta, \quad \frac{a_2}{2a_0}\beta^2, \quad \frac{\bar{a}_2}{2a_0}\beta^2, \ldots, \quad \frac{a_n}{2a_0}\beta^n, \quad \frac{\bar{a}_n}{2a_0}\beta^n.$$

Für hinreichend kleine Werte von β wird der Punkt mit den Koordinaten (17) im Inneren des konvexen Körpers K_{2n} liegen; für hinreichend grosse Werte von β dagegen wird mindestens eine der Grössen (17) dem absoluten Betrage nach grösser als Eins sein und folglich der entsprechende Punkt ausserhalb K_{2n} liegen. Der erste Punkt, wo diese Kurve den konvexen Körper verlassen kann wird durch die kleinste positive Wurzel R_n der Gleichung

$$D_n\left(2a_0, \beta(a_1 + i\bar{a}_1), \ldots, \beta^n(a_n + i\bar{a}_n)\right) = 0$$

gegeben sein.

---

[7]) FATOU, *Séries trigonométriques et séries de* TAYLOR [Acta Mathematica, Bd. XXX (1906), S. 335-400].

Ist also $\beta < R_n$ so gibt es, nach Satz IV, positive harmonische Funktionen mit der Entwickelung

$$a_0 + \sum r^k \beta^k (a_k \cos k\theta + \bar{a}_k \sin k\theta) + \cdots$$

die für $r < 1$ regulär sind; es existieren demnach auch harmonische Funktionen deren Entwickelung mit den gegebenen $(2n+1)$ Koeffizienten beginnen und die für $r < \beta$ regulär und positiv sind.

Ist $\beta = R_n$ so liegt der Punkt (17) auf der Begrenzung von K_{2n} und es gibt, nach Satz VI der Einleitung, nur *eine einzige* Funktion, die für $r < R_n$ positiv und regulär ist und deren Entwickelung mit den gegebenen Koeffizienten beginnt. Ausserdem folgt aus den Formeln (7) und (8) der Einleitung, dass auf dem Kreise $r = R_n$ mindestens ein Pol dieser Funktion liegt und dass folglich für diese Funktion der Kreis $r = R_n$ gleichzeitig Konvergenzkreis ist. Dieses letzte Ergebnis zeigt aber, dass für $\beta > R_n$ das Problem unlösbar ist, und dass R_n der Radius des gesuchten Kreises ist.

[Zugleich haben wir bewiesen dass die Kurve (17) die Begrenzung von K_{2n} in einem einzigen Punkte trifft; würde nämlich für irgend ein $\beta > R_n$ der betreffende Punkt im Inneren oder auf der Begrenzung von K_{2n} liegen, so müsste für diesen speziellen Wert von β eine Funktion existieren die für $r < \beta$ regulär und positiv ist und deren Entwickelung mit den gegebenen Koeffizienten beginnt, was unmöglich ist].

Wir fassen unser Resultat in folgendem Satze zusammen:

SATZ XI. — *Es seien*

$$a_0, \quad a_1, \quad \bar{a}_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \bar{a}_n$$

$(2n+1)$ *gegebene Konstanten von denen* $a_0 > 0$ *und mindestens eine der übrigen von Null verschieden sei. Dann ist der Radius des grössten Kreises in welchem eine harmonische Funktion, deren Entwickelung mit den gegebenen Koeffizienten beginnt, zugleich regulär und positiv sein kann, gleich der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung in Determinantenform:*

$$D_n\left(2a_0,\ r(a_1 + i\bar{a}_1),\ \ldots,\ r^n(a_n + i\bar{a}_n)\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 2a_0 & r(a_1 + i\bar{a}_1) & \ldots & r^n(a_n + i\bar{a}_n) \\ r(a_1 - i\bar{a}_1) & 2a_0 & \ldots & r^{n-1}(a_{n-1} + i\bar{a}_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r^n(a_n - i\bar{a}_n) & r^{n-1}(a_{n-1} - i\bar{a}_{n-1}) & \ldots & 2a_0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Ist jetzt eine beliebige Reihe

$$(18) \qquad a_0 + \sum r^n (a_n \cos n\theta + \bar{a}_n \sin n\theta) \qquad (a_0 > 0)$$

gegeben, so können wir zu jedem n die kleinste positive Wurzel R_n der Gleichung in β

$$D_n\left(2a_0,\ \beta(a_1 + i\bar{a}_1),\ \ldots,\ \beta^n(a_n + i\bar{a}_n)\right) = 0$$

zuordnen. Sind die $2n$ ersten Koeffizienten $a_1, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ alle gleich Null und die vorige Gleichung nicht mehr von β abhängig so kann man festsetzen dass für das in Betracht kommende n die Zahl R_n positiv unendlich ist.

Die R_n bilden eine nie zunehmende Folge von positiven Zahlen. Es existiert also sicher

$$\lim_{n=\infty} R_n = R$$

und es ist $R \geqq 0$.

Ist $\beta > R$, so wird es ein R_N geben, das kleiner als β ist; dann wird jede harmonische Funktion, deren Entwickelung mit den ersten $(2N+1)$ Koeffizienten von (18) beginnt — also insbesondere die durch die Reihe (18) selbst möglicherweise dargestellte Funktion — innerhalb des Kreises $r = \beta$ entweder singulär oder negativ werden.

Stellt aber die Reihe (18) in der Umgebung von $r = 0$ ein reguläres Funktionselement dar, so gibt es einen Kreis von Radius $\rho > 0$ in welchem (18) regulär und positiv ist und es muss daher $R \geqq \rho$ sein. Die Bedingung $R > 0$ ist mithin *notwendig* damit (18) eine harmonische Funktion darstelle.

Ist jetzt $R > 0$ und β derart gewählt, dass $0 < \beta < R$ sei, so wird es für jedes n eine Funktion $U_n(r, \theta)$ geben, deren Entwickelung mit den $(2n+1)$ ersten Koeffizienten von (18) beginnt und für $r \leqq \beta$ regulär und positiv ist.

Nun bemerke man, dass, für den gewählten Wert von β, die Grössen (17), Koordinaten eines Punktes des konvexen Körpers K_{2n} darstellen und folglich alle kleiner als Eins sind; genau dieselben Ungleichheitsbedingungen gelten ferner, wenn man in (18) die Koeffizienten von $U(r, \theta)$ durch diejenigen von $U_n(r, \theta)$ ersetzt. Wegen dieser Ungleichheiten wird aber, wenn man eine feste positive Zahl $\zeta < 1$ wählt, für $r \leqq \zeta\beta$ die Entwickelung von $U(r, \theta)$ konvergieren und dortselbst eine harmonische Funktion darstellen. Ferner wird die Ungleichheit gelten

$$|U_n(r, \theta) - U(r, \theta)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} 4 r^k \left(\frac{2\,a_0}{\beta^k}\right) \leqq \frac{2\,a_0 \zeta^{n+1}}{1-\zeta}$$

welche zeigt, dass die Funktionen $U_n(r, \theta)$ für $r \leqq \zeta\beta$ gleichmässig gegen $U(r, \theta)$ konvergieren; aus dieser Tatsache entnimmt man sofort, dass $U(r, \theta)$ für $r < \beta$ positiv ist.

Da aber für β jede beliebige positive Zahl, die kleiner als R ist, gesetzt werden konnte, sieht man, dass die Bedingung $R > 0$ auch hinreichend ist, damit die Reihe (18), für $r < R$, eine reguläre und positive harmonische Funktion darstelle.

Ist (18) auch für $r = R$ regulär, so muss $U(r, \theta)$ auf diesem Kreise den Wert Null annehmen. Im entgegengesetzten Falle wäre es aber sehr gut möglich, dass die untere Grenze von $U(r, \theta)$ für $r < R$ positiv und von Null verschieden sei. Also haben wir den Satz:

SATZ XII. — *Es sei*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + \bar{a}_n \sin n\theta) \tag{18}$$

eine beliebige Entwickelung, in welcher $a_0 > 0$ *ist und mindestens eine der übrigen Zahlen* a_n, $\bar{a}_n$ *von Null verschieden. Wir bezeichnen mit* R_n *die kleinste positive Wurzel d*

Gleichung in r

$$D_n\left(2a_0, r(a_1+i\bar{a}_1), r^2(a_2+i\bar{a}_2), \ldots, r^n(a_n+i\bar{a}_n)\right) = 0$$

oder die Zahl $+\infty$ *wenn diese Gleichung die Variable r nicht enthält. Dann ist die Folge der Werte*

$$R_0,\ R_1,\ R_2, \ldots, R_n, \ldots \text{ ad inf.}$$

eine nie zunehmende Folge von positiven Zahlen, die einen nicht negativen endlichen Grenzwert R besitzt.

Ist $R = 0$ *so ist die Reihe* (18) *für jedes* $r \neq 0$ *divergent. Ist dagegen* $R > 0$ *so konvergiert die Reihe* (18) *für* $r < R$ *und stellt dortselbst eine reguläre harmonische Funktion dar, für welche eine der drei folgenden Möglichkeiten stattfindet:*

1) *Die Funktion* $U(r, \theta)$ *hat für* $r < R$ *die untere Grenze Null; sie ist regulär für* $r = R$ *und verschwindet in einem Punkte dieses Kreises.*

2) *Die Funktion* $U(r, \theta)$ *wird für* $r = R$ *singulär und ihre untere Grenze ist Null.*

3) $U(r, \theta)$ *wird für* $r = R$ *singulär und ihre untere Grenze für* $r < R$ *ist positiv.*

6. Ganz analoge Fragen kann man behandeln, wenn man statt Kreisen andere Gebiete der (r, θ)-Ebene betrachtet. Es sei z. B. Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der Ebene der komplexen Zahlen z, das den Anfangspunkt $z = 0$ der Koordinaten in seinem Inneren enthält und das wir der Einfachheit halber konvex nehmen wollen (d. h. wenn zwei Punkte zu Γ gehören so gilt dasselbe von der ganzen Strecke, die diese Punkte verbindet). Von der Begrenzung des Gebietes Γ wollen wir nichts voraussetzen; sie braucht nicht analytisch zu sein und kann sich eventuell ins Unendliche erstrecken.

Ferner sei eine analytische Funktion

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} f(z) &= \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots \\ \alpha_n &= a_n + i\bar{a}_n \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots) \\ a_0 &> 0 \end{aligned}\right.$$

gegeben, die in der Umgebung von $z = 0$ regulär sein möge.

Wir betrachten die Gesamtheit der Gebiete $\lambda\Gamma$, die man aus Γ mit Hülfe einer Ähnlichkeitstransformation vom Anfangspunkt der Koordinaten aus mit dem Vergrösserungsverhältnis λ erhält.

Wir können wiederum zwei Arten Fragen stellen:

a) es sind die $(n+1)$ ersten Koeffizienten von (19) gegeben. Welches ist der Maximalwert von λ, für welchen es Funktionen (19) gibt, deren Entwickelung mit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beginnt und deren reeller Teil im Inneren von $\lambda\Gamma$ nicht negativ ist?

b) es sind sämtliche Koeffizienten der Entwickelung (19) gegeben. Welches ist der Maximalwert von λ von der Eigenschaft, dass im Inneren von $\lambda\Gamma$ die Funktion $f(z)$ regulär sei und einen positiven reellen Teil besitze?

Es sei

$$z = m_1 u + m_2 u^2 + m_3 u^3 + \cdots$$

eine Funktion, welche die konforme Abbildung des Gebietes Γ der z-Ebene auf den

Einheitskreis der u-Ebene vermittele, bei welcher die Nullpunkte der beiden Ebenen in einander übergehen; diese Funktion ist, bis auf einen Faktor vom absoluten Betrage Eins, eindeutig bestimmt.

Dann wird durch

$$z = \lambda\varphi(u) = \lambda m_1 u + \lambda m_2 u^2 + \lambda m_3 u^3 + \cdots$$

der Einheitskreis der u-ebene auf das Gebiet, das wir mit $\lambda\Gamma$ bezeichneten, abgebildet.

Betrachten wir die Funktion

$$\frac{1}{2a_0} f(\lambda\varphi(u)) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\bar{a}_0}{2a_0}\right) + \frac{\lambda m_1 \alpha_1}{2a_0} u + \frac{\lambda^2 m_1^2 \alpha_2 + \lambda m_2 \alpha_1}{2a_0} u^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{2} + i\bar{b}_0\right) + (b_1 - i\bar{b}_1)u + (b_2 - i\bar{b}_2)u^2 + \cdots;$$

der gesuchte Grenzwert von λ wird gleich der oberen Grenze derjenigen Werte von λ sein, für welche im Einheitskreise $|u| < 1$

$$\Re \frac{1}{2a_0} f(\lambda\varphi(u)) > 0$$

ist. Dieser reelle Teil ist aber eine harmonische Funktion von der Art, wie wir sie bisher immer untersucht haben, so dass unsere früheren Methoden auch hier zum Ziele führen.

Sind z. B. die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gegeben so sind dadurch, wie eine leichte Überlegung zeigt die $b_1, \bar{b}_1, \ldots, b_n, \bar{b}_n$ als ganze rationale Funktionen von λ eindeutig bestimmt. Lässt man den Parameter λ von Null bis $+\infty$ variieren, so beschreibt der Punkt $b_1, \ldots, \bar{b}_n$ im $2n$-dimensionalen Raume eine Kurve deren Schnittpunkte mit unserem früheren konvexen Körper K_{2n} zu bestimmen sind. Man würde übrigens in dem von uns betrachteten Falle, wegen der Konvexität der Begrenzung von Γ genau wie unter § 4 beweisen können, dass diese Kurve nur einen einzigen Schnittpunkt mit der Begrenzung von K_{2n} haben kann. Der gesuchte Wert von λ würde mit der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$D_n(1, b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0,$$

deren Koeffizienten, wie schon bemerkt, ganze rationale Funktion von λ sind, zusammenfallen.

Die übrigen Schlüsse dieses und auch des folgenden Abschnittes lassen sich in ähnlicher Weise auf den hier betrachteten Fall übertragen.

III.

Absolute Beträge.

7. Zu einer weiteren Klasse von Fragen, die mittels unserer Hülfsmittel beantwortet werden können, gelangt man, wenn man nicht mehr die Variable z sondern die Funktion $f(z)$ mittels geeigneter konformer Abbildungen transformiert [8]).

[8]) Eine Andeutung des hier benutzten Weges befindet sich in der Arbeit von CARATHÉODORY:

Es seien z. B. wieder $(n+1)$ komplexe Grössen

(20) $$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

gegeben; wir betrachten die Gesamtheit der Funktionen $f(z)$ die in einem Kreise $|z|<r$ regulär sind und deren Entwickelung mit den Koeffizienten (20) beginnt. Welches ist, im Kreise $|z|<r$ die untere Grenze m_n der Menge der maximalen absoluten Beträge einer jeden dieser Funktionen?

Es sei $\mu > m_n$; dann gibt es nach Voraussetzung eine Funktion $f(z)$ für welche im Kreise $|z|<r$ durchweg $|f(z)|<\mu$ ist. Die Funktion

$$v = \frac{|\alpha_0| + \mu}{2(|\alpha_0| - \mu)} \cdot \frac{|\alpha_0| u - \alpha_0 \mu}{|\alpha_0| u + \alpha_0 \mu} \text{ [9]}$$

bildet das Innere des Kreises $|u|<\mu$ auf die Halbebene $\Re(v)>0$ derart ab, dass die Punkte $u=\alpha_0$, $v=\frac{1}{2}$ einander entsprechen. Folglich wird

(21) $$\varphi(z) = \frac{|\alpha_0| + \mu}{2(|\alpha_0| - \mu)} \frac{|\alpha_0| f(rz) - \alpha_0 \mu}{|\alpha_0| f(rz) + \alpha_0 \mu}$$

für $|z|<1$ einen positiven reellen Teil haben.

Nun kann man aber schreiben

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots$$

$$\beta_k = b_k + i\bar{b}_k,$$

und die Koeffizienten β_k sukzessive mit Hülfe der α_k berechnen.

Dabei ist zu bemerken, dass β_k nur von den $(k+2)$ Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und μ abhängt. Sind die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gegeben, so werden $b_1, \bar{b}_1, \ldots, b_n, \bar{b}_n$ rationale Funktionen des Parameters μ sein und im $2n$-dimensionalen Raume R_{2n} die Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{p}$ darstellen, der bei variablem μ eine Kurve beschreibt. Für ein hinreichend grosses μ wird dieser Punkt im Inneren des konvexen Körpers K_{2n} liegen. Liegt ferner der Punkt für $\mu=\mu_0$ im Inneren von K_{2n}, so wird er für jedes $\mu>\mu_0$ dieselbe Eigenschaft besitzen. Die Gleichung

$$|\beta_1| = \frac{r\mu|\alpha_1|}{\mu^2 - |\alpha_0|^2}$$

lehrt ferner, dass wenn man μ von $+\infty$ bis $|\alpha_0|$ abnehmen lässt und $|\alpha_1| \neq 0$ ist, der Punkt $\mathfrak{p}$ schliesslich ausserhalb K_{2n} zu liegen kommt. Sind $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \ldots, \alpha_{r-1}=0$ und $|\alpha_r| \neq 0$, so würde man denselben Schluss aus dem entsprechenden Werte von $|\beta_r|$ ziehen können.

Hieraus folgt aber, dass die Kurve $\mathfrak{p}(\mu)$ die Begrenzung des Körpers K_{2n} in einem

---

Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen [Mathematische Annalen, Bd. LXIV (1907), S. 95-115].

9) Wenn $\alpha_0=0$ ist, so muss $v = \dfrac{\mu - u}{2(\mu + u)}$ genommen werden.

und nur einem Punkte durchdringt; der Wert m_n von μ, der diesem Punkte entspricht, ist gleich der *grössten* positiven Wurzel der Gleichung

$$D_n(1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0, \tag{22}$$

in welcher die β als Funktionen von μ zu betrachten sind.

Diese grösste Wurzel m_n ist aber gleich dem gesuchten Minimum der oberen Grenze des absoluten Betrages unserer Klasse von Funktionen:

Für jedes $\mu > m_n$ ist es nämlich möglich eine Funktion $\varphi(z)$ zu finden, deren reeller Teil für $|z| < 1$ positiv ist und deren n ersten Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sind. Es liefert dann die Gleichung (21) durch Auflösung eine Funktion $f(z)$, die mit den $(n+1)$ gegebenen Koeffizienten beginnt und deren absoluter Betrag $|f(z)|$ für $|z| < r$ kleiner als μ ist.

Für $\mu = m_n$ gibt es eine einzige Funktion $\varphi(z)$, die unsere Bedingungen erfüllt; diese Funktion besitzt aber mindestens einen und höchstens n Pole, die alle auf dem Kreise $|z| = 1$ liegen; ihr reeller Teil ist in jedem regulären Punkte dieser Kreisperipherie gleich Null.

Die entsprechende Funktion $y = f(z)$ hat also die Eigenschaft, dass für $|z| = r$ durchweg $|f(z)| = m_n$ ist; sie ist rational und im Kreise $|z| = r$ einschliesslich des Randes regulär, und wenn der Punkt z den Kreis $|z| = r$ einmal beschreibt, so wird $f(z)$ den Kreis $|y| = m_n$ höchstens n mal durchlaufen, d. h. sie besitzt höchstens n Nullstellen im Inneren des Kreises $|z| < r$.

Es gibt übrigens keine andere Funktion mit diesen verschiedenen Eigenschaften, d. h., die mit den $(n+1)$ gegebenen Koeffizienten beginnt, im Inneren von $|z| < r$ regulär ist und dortselbst nicht mehr als n Nullstellen hat, und die endlich von konstantem absoluten Betrage für $|z| = r$ ist. Es sei z. B. $\bar{f}(z)$ eine derartige Funktion, $\bar{\mu}$ der Wert ihres absoluten Betrages für $|z| = r$; aus dem SCHWARZ'schen Spiegelungsprinzip folgt sodann, dass $\bar{f}(z)$ für beliebige Werte von z definiert ist und eine meromorphe Funktion darstellt, die höchstens n Pole besitzt. Für $|z| = r$ ist $\bar{f}(z)$ endlich, regulär und besitzt eine von Null verschiedene Ableitung [wäre nämlich $\bar{f}'(z)$ an einer Stelle dieses Kreises Null so würde es Punkte des Inneren dieses Kreises geben, für welche $|\bar{f}(z)| > \bar{\mu}$ wäre, was unmöglich ist].

Die Gleichung (21), in der man $\bar{\mu}$ statt μ geschrieben hat, liefert dann eine Funktion $\bar{\varphi}(z)$, die gleichfalls meromorph ist und deren sämtliche Pole (höchstens n an Anzahl) auf dem Einheitskreise $|z| = 1$ liegen; der reelle Teil von $\bar{\varphi}(z)$ ist für $|z| < 1$ positiv und verschwindet in jedem regulären Punkte des Randes $|z| = r$. Die Funktion $\bar{\varphi}(z)$ hat demnach die Gestalt (7) und nach den Sätzen I und VI der Einleitung muss ihr n^{ter} geometrischer Räpräsentant auf der Begrenzung des konvexen Körpers K_{2n} liegen.

Nun liegt aber andererseits dieser Punkt nach seiner Konstruktion auf der Kurve $\mathfrak{p}(\mu)$, die ihrerseits nur einen Punkt mit der Begrenzung von K_{2n} gemeisam hat; hieraus folgt, dass $\bar{\mu} = m_n$ sein muss.

Wir sind jetzt zu folgendem Satze gelangt:

SATZ XIII. — *Es seien* $(n+1)$ *komplexe Grössen* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *und eine positive reelle Grösse* r *gegeben. Dann gibt es eine und nur eine analytische Funktion*

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$$

deren Potenzreihe mit den gegebenen $(n+1)$ *Koeffizienten beginnt die im Inneren des Kreises* $|z| = r$ *regulär ist, ebenda höchstens* n *Nullstellen besitzt und die auf seiner Peripherie eindeutig erklärt und von konstantem absolutem Betrage ist.*

Diese Funktion ist in der ganzen Ebene meromorph und besitzt höchstens n *Pole; der Wert* m_n *des absoluten Betrages dieser Funktion für* $|z| = r$ *hängt algebraisch von den reellen und imaginären Teilen der* $(n+2)$ *Grössen* $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, *und* r *ab; er ist gleich der grössten positiven Wurzel der Gleichung* (22) *in* μ.

Das Maximum des absoluten Betrages im Kreise $|z| < r$ *für jede andere Funktion, die im Inneren dieses Kreises regulär ist und deren Entwickelung mit den* $(n+1)$ *gegebenen Koeffizienten beginnt, ist grösser als* m_n [10]).

8. Es sei

$$y = f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots \tag{23}$$

eine Potenzreihe, deren sämtliche Koeffizienten gegeben sind. Wir wollen das Maximum von $|f(z)|$ für die Kreise $|z| = r$ bestimmen, innerhalb welcher $f(z)$ regulär ist.

Dazu bestimmen wir nach den Auseinandersetzungen des vorigen § die Grössen $m_1(r)$, $m_2(r)$, ..., die wir dort untersucht haben und die von dem Radius r des Kreises abhängen.

Diese Grössen bilden ihrer Definition nach eine nie abnehmende Reihe von Zahlen. Es existiert also jedenfalls der Limes

$$\lim_{n=\infty} m_n(r) = m(r)$$

[wobei $m(r)$ auch gleich $+\infty$ sein kann].

Ist $m(r)$ endlich, so gilt für jedes n die Ungleichheit $m \geqq m_n$; man wird also eine Reihe von Funktionen

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_k(z),\ \ldots$$

konstruieren können derart, dass die ersten k Glieder der Entwickelung von $f_k(z)$ mit denen von (23) übereinstimmen, und dass für jedes k und für $|z| < r$ auch $|f_k(z)| < m$ ist. Hieraus folgt aber, dass $\lim\limits_{k=\infty} f_k(z)$ für $|z| < r$ existiert und eine analytische Funk-

[10]) Mit diesem Resultate ist dasjenige zu vergleichen, das wir in der Note: *Remarque sur le théorème de M.* JENSEN [Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXLV (2. Sem. 1907), S. 163-165] veröffentlicht haben. Dort wurden für die im Kreise $|z| < r$ regulären Funktionen die Nullstellen vorgeschrieben (und nicht wie hier die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) sowie der Wert $f(z)_{z=0} = \alpha_0$ Gesucht wurde wieder das Minimum der oberen Grenze des absoluten Betrages sämtlicher Funktionen, die den soeben ausgesprochenen Bedingungen genügen. Bemerkenswert ist, dass in beiden Problemen das Minimum für dieselbe Klasse von rationalen Funktionen mit konstantem absoluten Betrage für $|z| = r$ erreicht wird.

tion darstellt, die für $|z| < r$ regulär ist und deren Entwickelung mit der von (23) übereinstimmt. Es ist also jedenfalls für $|z| < r$

$$|f(z)| < m.$$

Ist nun $\mu < m(r)$, so wird für ein gewisses $n = N$, $\mu < m_N$ sein und es wird daher keine einzige Funktion geben deren Entwickelung mit den $(N+1)$ ersten Koeffizienten von (23) beginnt und die im Kreise $|z| = r$ ihrem absoluten Betrage nach durchweg kleiner als μ ist. Das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ ist also im betrachteten Kreise *genau* gleich $m(r)$.

IV.

Das Picard'sche Problem.

9. Ein weiteres Anwendungsfeld unserer Methoden bietet das klassische PICARD'sche Problem in der grundlegenden Form, die ihm Herr LANDAU gegeben hat.

Herr LANDAU hat bekanntlich bewiesen, dass jede Potenzreihe

$$(24) \qquad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots \\ \alpha_0 \neq 0, 1; \quad |\alpha_1| > 0 \end{cases}$$

deren zwei ersten Koeffizienten gegeben sind, innerhalb eines Kreises, dessen Mittelpunkt $z = 0$ ist und dessen Radius nur von α_0 und α_1 abhängt, entweder singulär werden muss oder mindestens einen der beiden Werte 0, 1 annimmt.

Es seien jetzt die $(n+1)$ ersten Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Potenzreihe (24) gegeben. Es sei ferner $\alpha_0 \neq 0, 1$. Wir wollen den grössten Kreis, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt der Koordinaten liegt, bestimmen von der Eigenschaft, dass eine Potenzreihe gefunden werden kann, die mit den gegebenen Koeffizienten beginnt und in diesem Kreise regulär und von Null und Eins verschieden ist.

Im Folgenden soll mit $\nu(y)$ die inverse der elliptischen Modulfunktion bezeichnet werden, welche bekanntlich die beiden folgenden charakteristischen Eigenschaften hat:

a) $\nu(y)$ bleibt regulär, wenn y auf der unendlichblättrige RIEMANN'sche Fläche variiert, von der jedes Blatt in den Punkten 0, 1, ∞ verzweigt ist.

b) Für alle diese Punkte bleibt $\mathfrak{R}(-i\nu(y)) \geqq 0$; die Funktion $u = -i\nu(y)$ liefert die konforme Abbildung der besagten RIEMANN'schen Fläche auf die Halbebene $\mathfrak{R}(u) > 0$.

Wir nehmen jetzt an, es sei möglich eine Funktion

$$y = f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$$

zu finden, die in einem Kreise $|z| < r$ regulär sei und die Werte 0, 1 nicht annehme. Dann wird, wenn wir in der Umgebung der Stelle $y = \alpha_0$ einen der unendlich vielen Zweige der inversen Modulfunktion herausgreifen, die Funktion $-i\nu(y(z))$ eine Funktion von z sein, die für $|z| < r$ regulär ist und einen positiven reellen Teil besitzt. Diese letzte Funktion können wir in der Umgebung von $z = 0$ entwickeln. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} -i\nu(y) &= -i\nu(\alpha_0 + (y - \alpha_0)) \\ &= -i\nu(\alpha_0) - i\nu'(\alpha_0)(y - \alpha_0) - i\nu''(\alpha_0)\frac{(y-\alpha_0)^2}{2!} - \cdots \end{aligned}$$

und andererseits

$$y - \alpha_0 = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$(25) \qquad -i\nu(y) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_n z^n + \cdots$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\beta_0 = -i\nu(\alpha_0), \quad \beta_1 = -i\nu'(\alpha_0)\alpha_1, \quad \beta_2 = -i\nu'(\alpha_0)\alpha_2 - i\nu''(\alpha_0)\frac{\alpha_1^2}{2}, \ \ldots \\ &\qquad\qquad \beta_k = -i\nu'(\alpha_0)\alpha_k + \cdots \end{aligned} \right.$$

Wir sehen, dass die Zahlen $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ durch die $(n+1)$ gegebenen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eindeutig bestimmt sind und berechnet werden können, wenn man die Kenntnis der Entwickelung der inversen Modulfunktion in der Umgebung des Punktes α_0 voraussetzt; wir bemerken dazu, dass

$$b_0 = \Re(\beta_0) = \Re(-i\nu(\alpha_0)) > 0$$

und dass, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$ sind und $\alpha_k \neq 0$ ist, dann auch $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{k-1} = 0$ sind und $\beta_k = -i\nu'(\alpha_0)\alpha_k \neq 0$ ist.

Damit aber die Funktion (25) für $|z| < r$ einen positiven reellen Teil besitze, muss r den Bedingungen des Satzes XI genügen d. h. es muss $r \leqq r_n$ sein, wo r_n die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$D_n(2b_0, r\beta_1, r^2\beta_2, \ldots, r^n\beta_n) = 0$$

bedeutet.

Der gesuchte Maximalradius ist also gewiss kleiner oder höchstens gleich r_n; wir behaupten nun, dass er *genau* gleich r_n ist. Für jedes $r \leqq r_n$ kann man nämlich eine Funktion $\varphi(z)$ finden die für $|z| < r$ regulär ist, deren reeller Teil in diesem Kreise positiv ist und deren Entwickelung mit $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ beginnt, wo die β durch die Gleichungen (26) definiert sind. Setzt man diese Funktion $\varphi(z)$ in die Gleichung

$$\varphi(z) = -i\nu(\alpha_0) - i\nu'(\alpha_0)(y - \alpha_0) - i\nu''(\alpha_0)\frac{(y-\alpha_0)^2}{2} - \cdots$$

ein, und berechnet daraus y, so erhält man eine Funktion, deren $(n+1)$ ersten Koeffizienten mit den gegebenen übereinstimmen, die für $|z| < r$ regulär ist und die Werte 0, 1 auslässt.

Insbesondere gibt es eine einzige Funktion y_n, welche unsere gegebenen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Anfangskoeffizienten besitzt, im Kreise $|z| < r_n$ die Werte 0, 1 auslässt und regulär ist. Diese Funktion wird den Kreis $|z| = r_n$ als Grenzkreis besitzen, d. h. ihre Potenzreihe wird nirgends über diesen Kreis hinaus fortsetzbar sein.

Wir haben schliesslich folgenden Satz erhalten:

Satz XIV. — *Es seien*

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

$(n+1)$ *gegebene Konstanten, von denen* $\alpha_0 \neq 0$ *sein möge. Man erhält den Radius des grössten Kreises (mit dem Mittelpunkte* $z = 0$*), der die Eigenschaft besitzt, dass eine Potenzreihe*

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$$

mit den gegebenen Anfangskoeffizienten existiert, die im Inneren dieses Kreises konvergiert und dortselbst die Werte 0, 1 *auslässt, auf folgende Weise: Man bestimme die* $(n+1)$ *ersten Koeffizienten* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *der Entwickelung*

$$-i\nu(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_n z^n + \cdots$$

und bilde die Gleichung in Determinantenform

$$D_n(2\,b_0, r\beta_1, \ldots, r^n\beta_n) = 0.$$

Dann ist die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung der gesuchte Maximalradius. Hierbei bedeutet $\nu(y)$ *die oben definierte Inverse der elliptischen Modulfunktion.*

10. Es sei jetzt eine Potenzreihe

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots \qquad (\alpha_0 \neq 0, 1) \tag{27}$$

gegeben. Wir können für jedes $n \geqq k$, wo k den Index der ersten nicht verschwindenden Zahl der Folge $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bedeutet, die Grösse r_n berechnen, die wir im vorigen Paragraphen definiert haben. Die Folge $r_1, r_2, \ldots$ bildet eine nicht aufsteigende Reihe von Zahlen und wird einen Limes ρ besitzen:

$$\lim_{n=\infty} r_n = \rho \geqq 0.$$

Ist die Funktion (27) in der Umgebung von $z = 0$ regulär, so wird sie in einem Kreise von genügend kleinem Radius σ regulär sein und die Werte 0, 1 auslassen; die r_n sind dann sämtlich grösser als σ und dasselbe wird auch von ρ gelten.

Wir bilden nun die Funktion $-i\nu\big(y(z)\big)$ und sehen, dass diese Funktion, nach dem Satze XII, für $|z| < \rho$ regulär ist und einen nicht negativen reellen Teil besitzt. Es wird daher auch (27) für $|z| < \rho$ regulär und von 0, 1 verschieden sein.

Andererseits ist aber jedes beliebige r, das grösser als ρ ist auch grösser als ein r_n z. B. als r_N, und jede Funktion, deren $(N+1)$ ersten Koeffizienten mit denen von (27) übereinstimmen, insbesondere also die Funktion (27) selbst, wird innerhalb des Kreises $|z| = r$ entweder singulär werden oder einen der Werte 0, 1 annehmen.

Hieraus folgt, dass die Funktion (27) auf der Peripherie des Kreises $|z| = \rho$ entweder singulär wird oder einen der beiden Werte 0 oder 1 wirklich annimmt. Dieses Resultat liefert folgenden Satz:

Satz XV. — *Gegeben sei eine beliebige Potenzreihe*

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots \tag{27}$$

bei welcher der erste Koeffizient $\alpha_0 \neq 0, 1$ *sei. Mit* $\nu(y)$ *bezeichnen wir die Inverse der* *elliptischen Modulfunktion und bestimmen die Koeffizienten der Entwickelung*

$$-i\nu(\alpha_1 + a_1 z + \cdots) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots.$$

Ferner bedeute r_n die kleinste positive Wurzel der Gleichung in r

$$D_n(2b_0, r\beta_1, r^2\beta_2, \ldots, r^n\beta_n) = 0,$$

die immer existiert und endlich ist, sobald $n \geqq k$ und k den kleinsten Index bedeutet für welchen α_k von Null verschieden ist. Dann sind die positiven Werte r_k, r_{k+1}, ... niemals zunehmend und besitzen einen Limes ρ.

Im Falle wo ρ verschwindet, ist die Reihe (27) divergent für jedes $z \neq 0$. Ist ρ aber positiv, so konvergiert diese Reihe mindestens für $|z| < \rho$ und lässt in diesem Gebiete die Werte 0 *und* 1 *aus. Auf dem Kreise $|z| = \rho$ dagegen wird die Funktion* (27) *entweder singulär oder aber sie nimmt dort einen der Werte* 0 *oder* 1 *an.*

11. Man kann sich von der Bedingung $\alpha_0 \neq 0, 1$ sehr leicht befreien. Ist z. B. $\alpha_0 = 0$, so hat $y(z)$ für $z = 0$ eine Nullstelle und man kann dann fordern, den grössten Kreis zu bestimmen, innerhalb dessen die Funktion $y(z)$ regulär und $\neq 1$ ist und keine andere Nullstelle besitzt.

Es genügt zu diesem Zwecke statt der Funktion $-i\nu(y)$ die Funktion $e^{i\pi\nu(y)}$ als Abbildungsfunktion zu betrachten.

V.

Monotone Funktionen.

12. Wir wollen zum Schluss noch folgende Frage kurz behandeln:

Es sei $\varphi(\theta)$ eine stetige, stetig differenziierbare, monoton wachsende Funktion, die für das Intervall $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definiert sein möge. Wir bezeichnen wieder mit a_1, $\bar{a}_1$, ..., a_n, $\bar{a}_n$, ... ihre FOURIER'schen Konstanten und mit $2\pi s$ ihren Sprung $[\varphi(2\pi) - \varphi(0)]$. Wir wollen zeigen, dass diese Grössen notwendig gewissen Bedingungen genügen müssen, wenn $\varphi(\theta)$ die oben erwähnten Eigenschaften besitzt.

Mit b_0, b_1, $\bar{b}_1$, ..., b_n, $\bar{b}_n$, ... bezeichnen wir die FOURIER'schen Konstanten der Ableitung $\varphi'(\theta)$; dann gelten folgende Formeln, die man durch partielle Integration erhält:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = s,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta = \left[\frac{\varphi(\vartheta)\cos k\vartheta}{\pi}\right]_0^{2\pi} + \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta$$

$$= 2s + k\bar{a}_k$$

$$\bar{b}_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta = \left[\frac{\varphi(\vartheta)\sin k\vartheta}{\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta$$

$$= -k a_k,$$

Durch diese Formeln sind die Grössen b_k und $\bar{b}_k$ vollständig und eindeutig mit Hülfe der Grössen a_1, $\bar{a}_1$, ... und s bestimmt.

Nun ist aber die Funktion $\varphi'(\theta)$ notwendig positiv und nach dem Satze III der Einleitung müssen daher ihre FOURIER'schen Konstanten den Bedingungen genügen:

$$D_n(2b_0, b_1 + i\bar{b}_1, \ldots, b_n + i\bar{b}_n) \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

was man auch schreiben kann

$$D_n(2s, 2s + \bar{a}_1 - ia_1, 2s + 2\bar{a}_2 - 2ia_2, \ldots, 2s + n\bar{a}_n - nia_n) \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Breslau / Kolozsvár } im März 1911.

C. CARATHÉODORY

L. FEJÉR.

INHALTSÜBERSICHT.