2. *Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagessehen;*
von Erwin Schrödinger.

(II. Mitteilung.)

§ 6. Der Spektralkegel. Begrenzung des reellen Farbenraumes und Orientierung in ihm.

Die Abbildung der Farben auf den Vektorkegel und die Aufsuchung des Vektors, der einer konkret vorgegebenen Farbe entspricht, gestaltet sich, so schwierig die saubere experimentelle Durchführung ist, theoretisch äußerst einfach. Man wählt drei konkret vorgegebene Farben — als Eichfarben — aus, zwischen denen keine lineare Beziehung besteht, d. h. von denen keine aus den beiden anderen mischbar ist. Diese darf man drei beliebigen nichtkomplanaren Vektoren des Büschels zuordnen, entsprechend den neun willkürlichen Koeffizienten, die bei der allgemeinsten (homogenen) affinen Transformation verfügbar sind. (Ein beliebiges nichtkomplanares Vektortripel ist mit jedem anderen „kongruent" im Sinne der affinen Geometrie.) Ist nun eine vierte Farbe konkret gegeben, so stellt man durch Mischen experimentell die lineare Gleichung her, die zwischen den vier Farben jedenfalls besteht. Sind A, B, C die Eichfarben, F die vierte Farbe, so hat man wie oben Gleichung (3)

$$F = x_1 A + x_2 B + x_3 C. \tag{3}$$

Die Vorzeichen der x_i, die wir als Farbkoordinaten (auch Eichwerte) von F, bezogen auf $A\,B\,C$ als Eichfarben, bezeichnen, können verschieden verteilt, *eines* davon muß jedenfalls positiv sein, weil links eine wirkliche Farbe steht. Entweder wird eine der 4 Farben aus den drei übrigen mischbar sein oder ein gehörig dosiertes Gemisch von zweien ist einem gehörig dosierten Gemisch der beiden anderen gleich. Jedenfalls läßt sich aus obiger Gleichung der zu F gehörige Vektor konstruieren und die x_i sind einfach seine affingeometrischen Komponenten bezogen auf A, B, C als Grundvektoren.[1]) Konstruiert man auf diese Weise die Mannigfaltigkeit von Vektoren, welche den homogenen Lichtern eines konkret vorgegebenen Spektrums entspricht, so bilden sie einen gewissen Kegel, den Spektralkegel, auf dessen Mantel die Vektorspitzen eine gewisse Kurve einzeichnen. Nicht die Lage des Kegelmantels, wohl aber die besondere Führung dieser Kurve ist abhängig von der speziellen Energieverteilung des vorliegenden Spektrums, indem die Kurve durch Erhöhung der Energie an einer Stelle des Spektrums vom Ursprung weiter hinausgerückt, durch Verminderung näher an den Ursprung herangezogen wird. Uns interessiert vor allem die völlig unveränderliche (natürlich im affingeometrischen Sinn) Gestalt des Kegel*mantels*. Seine wichtigste Eigenschaft ist diese. Zwar besitzt der Mantel zwei *ebene* Zwickel. Es sind das die von König sogenannten Zwischenstrecken von $\lambda = 630$ bis $\lambda = 655$ und von $\lambda = 430$ bis $\lambda = 475$, die Zwickel ROG und VOI der Fig. 3. (In der Figur ist auch noch zur besseren Verdeutlichung der Schnitt des Spektralkegels mit einer willkürlich gelegten Ebene gezeichnet.)

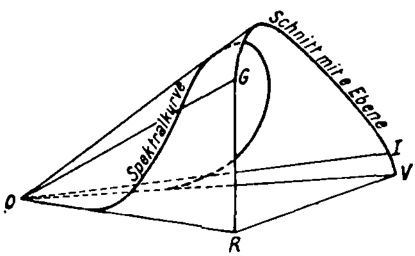

Fig. 3. Der Spektralkegel.

Auf jeder dieser Zwischenstrecken — sie umfassen die Abstufungen des *Orange* und des *Indigo* — ist aus zwei Spektralfarben jede zwischen ihnen liegende Spektralfarbe mischbar. *Im übrigen aber kommt es nicht vor, daß drei erzeugende des Kegels in einer Ebene liegen.* Der Kegel hat keine Wendegeneratrix, sondern ist einsinnig gerollt, und zwar nicht so stark gerollt (man denke an das Herstellen einer Düte), daß ein komplanares Generatricentripel auf andere Weise sich einstellen würde.

1) Als Vektorkomponenten bezeichnet man zuweilen noch etwas anderes, nämlich die *Orthogonalprojektionen* auf die Koordinatenrichtungen. Komponenten dieser Art kommen hier nicht in Betracht, weil das Senkrechtstehen ohne Bedeutung ist. In der metrischen Geometrie stehen die beiden Komponentenarten bekanntlich im Verhältnis kovariant-kontravariant. Sie fallen numerisch zusammen, wenn die Grundvektoren paarweise orthogonal und gleich lang sind.

Die ebenen Zwickel bilden *die Ränder* des Mantels. Dennoch, wenn man das Spektrum gegen ein Ende hin durchwandert, so nimmt der Farbvektor die Randlage ein, *noch bevor* das Ende des sichtbaren Spektrums erreicht ist. Von da an zieht er sich, ohne seine Richtung zu ändern, in sich selbst zurück. Das bedeutet, daß in diesen *Endstrecken* (König) jede Farbe aus jeder anderen durch bloße Änderung der objektiven Intensität herstellbar oder, wie wir oben sagten, von *gleicher Reizart* (v. Kries) ist. Wegen dieser Mischbarkeit aus *einer* bzw. aus *zwei* Farben heißen die End- bzw. Zwischenstrecken auch mono- bzw. dichromatisch. Zwischen ihnen liegt die *Mittelstrecke*, auf welcher der Spektralkegel durchwegs konvex gekrümmt ist. Ich gebe noch einen Überblick über die Lage dieser fünf Spektralteile, deren Abgrenzungen gegeneinander aber naturgemäß nicht scharf bestimmbar, wohl auch von

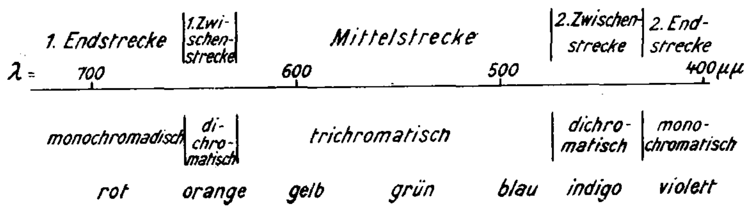

Fig. 4.

Auge zu Auge ein wenig wechselnd sind. Mischt man zwei Farben von den beiden Endstrecken miteinander in wechselndem Verhältnis, so erhält man alle möglichen Purpurtöne, und zwar die gesättigtesten, die sich herstellen lassen. Die Farbvektoren erfüllen den ebenen Zwickel $R\,O\,V$, der den Spektralkegel zu einer geschlossenen Düte ergänzt. Da nun jede beliebige Farbe sich durch irgendein Licht muß darstellen lassen, das irgendwie aus Spektrallichtern gemischt ist, ja sogar, wie wir wissen, durch eine Mischung von nicht mehr als zwei Spektrallichtern, so folgt, daß *nur die Vektoren im Inneren jener Düte — diese aber auch alle — reelle Farbvektoren sind.* Auch die drei Eichfarben, von denen wir ausgingen, müssen im Innern oder auf dem Rande der Düte liegen. —

Von der ungefähren Verteilung der Farben im Inneren machen wir uns ein anschauliches Bild durch die Überlegung, daß irgendwo im Innern die Vektorrichtung liegen muß, welche dem *Weiß* —

etwa Sonnenlicht — entspricht. Das Ebenenbüschel durch diese Richtung zerfällt die Gesamtheit der Farben in Gruppen, derart, daß Farben, die auf derselben *Halb*ebene des Büschels liegen, aus derselben Spektralfarbe (oder demselben gesättigten Purpurton) durch „Verdünnung mit Weiß" hervorgehen. Sie bilden — nach dem allgemeinen Sprachgebrauch — ungesättigtere Abwandlungen dieser Spektralfarbe (dieses Purpurs), und zwar *um so* ungesättigter, d. h. weißlicher, *je näher* sie dem Weiß liegen. Dabei ist scharf zu betonen, daß dieses „um so — je" nur eine Bedeutung hat für *denselben* Farbton, d. h. in *derselben* Halbebene. Die Winkel, die zwei mit Weiß *nicht* komplanare Vektoren mit der Weißrichtung bilden, liefern kein Maß für die relative Sättigung der beiden Farben; ein solches existiert auf unserem gegenwärtigen Standpunkt überhaupt nicht, weil diese Winkel durch affine Transformation völlig verzerrt, ihr Verhältnis umgekehrt werden kann.

Farbenpaare, die mit Weiß komplanar sind und das Weiß *einschließen*, sind komplementär im weitesten Sinne des Wortes: aus ihnen läßt sich, bei gehöriger Dosierung, Weiß mischen.

Farbenpaare *gleicher Richtung* (ineinanderliegende Vektoren) sind, wie schon oben erwähnt, von *gleicher Reizart* (gleichem Farbton *und* gleicher Sättigung, nach dem Sprachgebrauch); und zwar entsprechen natürlich den lichtschwächeren Farben die kürzeren Vektoren. Auch hier gilt aber eine ähnliche Bemerkung, wie oben bezüglich der Sättigung gemacht: aus dem Längenverhältnis von Vektoren *verschiedener* Richtung läßt sich durchaus kein Schluß auf das Lichtstärkenverhältnis ziehen. Solche Vektoren haben vom affingeometrischen Standpunkt, folglich auch vom Standpunkte der niederen Metrik als völlig inkommensurabel zu gelten; das Lichtstärkenverhältnis von Farben *verschiedener Reizart* entzieht sich bis jetzt völlig unserer Beurteilung.

Es ist wichtig, darauf zu achten, daß der so — durch Hervorhebung der Weißrichtung — gewonnenen Orientierung im Farbenraum etwas Willkürliches anhaftet. Das Weiß, als Farbe des Sonnenlichtes, ist weder durch die etwa besonders einfache Zusammensetzung dieses Lichtes, noch etwa durch irgendwie hervorstechende Lage des zugeordneten Vektors, sondern einzig und allein psychologisch ausgezeichnet durch die besondere Einfachheit des Eindrucks oder besser gesagt durch das Aufhören des Urteils über den Farbton ohne Aufhören der Gesichtsempfindung. Daß diese psychologische Sonderstellung einem physikalisch in keiner Weise ausgezeichneten Lichtgemisch — schwarzer Strahlung von etwa 7000° C — zukommt, erklärt sich ungezwungen aus der Stammesgeschichte bzw. aus der Entwicklungsgeschichte des Sinnesorganes. Denn fast ausschließlich unter der Einwirkung *dieses* Lichtgemisches ist unser Auge entstanden, hat es sich entwickelt und seine gegenwärtige Funktionsform angenommen. Daß dieses Lichtgemisch für die so entstandene Farbwahrnehmung eine ausgezeichnete, zwischen den möglichen Extremen vermittelnde Rolle spielt, ist nicht verwunderlich; ist doch, nebenbei bemerkt, auch für die merkwürdige Koinzidenz des *Energie*maximums der Sonne mit dem *Helligkeits*maximum in einem Spektrum von konstanter Energie die einzige ungezwungene Erklärung die phylogenetische; an der Stelle des Energiemaximums und zu beiden Seiten desselben war die Entwicklung hoher Lichtempfindlichkeit sozusagen am rentabelsten, wenn es auf möglichst deutliche Wahrnehmung der Gegenstände auch bei schwacher Beleuchtung ankam.

Aber keineswegs hebt diese phylogenetisch plausible Erklärung die weitgehende Unbestimmtheit in der Definition des „Weiß“. Diese Unbestimmtheit ist doppelter Art; erstens eine physikalische, da die Zusammensetzung des Sonnenlichtes keine scharf bestimmte ist, sondern mit Tages- und Jahreszeit wechselt: zweitens eine physiologische, da die Farbe — i. e. gleichaussehende Lichtergruppe —, der wir den Farbton absprechen, mit der *Stimmung* des Auges sehr bedeutend variiert. Auch das heute fertig vorliegende Auge ist geneigt, nach nur minutenlanger Gewöhnung an eine andere als Sonnenbeleuchtung sein Urteil der Beleuchtung anzupassen und entweder dieses vorherrschende Licht selbst oder ein ihm näher gelegenes als farbtonfrei anzuerkennen, dafür aber dem Sonnenlicht, wenn es in dieser Umgebung vereinzelt auftritt, einen dazu komplementären Farbnamen zu geben. Damit soll nichts darüber gesagt werden, ob das, was jeweilig als „Weiß“ bezeichnet wird, *psychologisch* immer dasselbe ist oder nicht (ich halte dafür, *daß* es dasselbe ist). Nach unserer metrischen Definition der Farbe ist es *eine andere Farbe* (vgl. oben § 1), und darauf kommt es für uns an, weil unser Farbbegriff der einzige metrisch faßbare, der psychologische dagegen an und für sich schwankend und metrisch nicht erfaßbar ist.

Aus alledem geht hervor, daß die Orientierung im Farbenraum an der Hand der Weißrichtung keine sehr prinzipielle Sache ist, sondern nur eine Vorstellungshilfe. Wir können sie zu einer völlig scharfen machen durch exakte physikalische Festlegung des Lichtgemisches, das als Weiß bezeichnet werden soll; aber darin liegt Willkür, wir können rein formal auch einem ganz beliebigen, ganz und gar nicht weißen Gemisch diese Rolle des Wegweisers übertragen.[1]) Freilich werden dann Bezeichnungen wie „ungesättigtere Abwandlung desselben Farbtons" für Mischungen mit diesem Standardlicht völlig haltlos; aber das werden sie für ein geeignet umgestimmtes Auge auch wenn wir Sonnenweiß als Standard wählen.

Viele Beobachter geben an, daß ganz abgesehen von der Stimmung des Auges eine Farbe ihren Farbton auch dann ändert, wenn man sie mit demjenigen Weiß vermischt, das bei der eben herrschenden Stimmung wirklich tonfrei erscheint[2]); ja selbst dann, wenn man ihre Zusammensetzung gar nicht ändert, sondern nur ihre objektive Intensität herabsetzt.[3]) Die Bezeichnung „gleicher Farbton" paßt dann nicht einmal auf das, was wir, nur um einen kurzen Ausdruck für den rein objektiven Sachverhalt zu haben, als Farben gleicher Reizart bezeichnet haben. Ich will hier nur hervorheben, daß auch diese merkwürdige Tatsache unsere Überlegungen in keiner Weise stört. Vom Standpunkte der niederen Metrik, die nur auf dem absoluten Gleichheitsurteil aufgebaut ist, ist jedes darüber hinausgehende Farburteil, besonders: „gleichhell", „gleich im Farbton" oder dergleichen etwas Akzessorisches, worum sie sich nicht zu kümmern hat, wofür sie inkompetent ist und wovon sie höchstens zur beiläufigen raschen und bequemen Bezeichnung, aber niemals zur exakten Begriffsbestimmung Gebrauch machen darf.

---

1) Vgl. von Kries, in W. Nagels Handbuch der Physiologie des Menschen, Bd. III 1, S. 116 (Braunschweig, F. Viehweg, 1904).

2) Vgl. die dritte der obzitierten Abhandlungen von Helmholtz, dann W. Abney, Proc. Roy. Soc. A. **83.** S. 120. 1910. Die dort experimentell hergestellten „Farbtongleichungen" Abneys gehören durchaus der höheren Farbenmetrik an.

3) Vgl. besonders F. Exner, Wiener Ber. IIa **111**. S. 857. 1902.

In den letzten Paragraphen des II. Teils werden wir auf diese Erscheinungen zurückzukommen haben.

§ 7. Theoretische Koordinatenbestimmung.

Die Aufgabe, zu einer beliebigen Farbe die Koordinaten bzgl. dreier Eichfarben zu finden, dachten wir uns oben, im Anfang des § 6, experimentell gelöst durch wirkliche Herstellung der betreffenden Farbengleichung. Dazu muß die Farbe natürlich in concreto gegeben sein, und zwar in einer Form, die das Experimentieren mit ihr zuläßt; dagegen braucht die spektrale Zusammensetzung des betreffenden Lichtes — seine Wellenlängenfunktion $f(\lambda)$ — nicht bekannt zu sein. Wir betrachten jetzt den umgekehrten Fall, daß ein Licht nur zahlenmäßig durch seine Wellenlängenfunktion gegeben und die Aufgabe gestellt ist, den zugeordneten Farbvektor rein rechnerisch aufzufinden.

Die Aufgabe ist lösbar, sobald ein Spektrum *von bekannter Energieverteilung* experimentell „durchgeeicht“, d. h. die Koordinaten der kontinuierlichen Folge reiner Lichter dieses

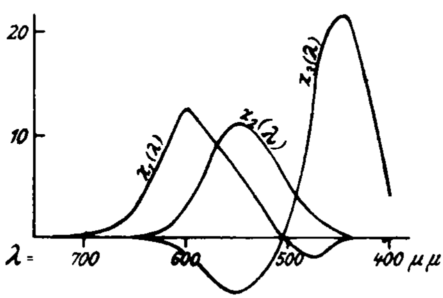

Fig. 5.

Spektrums experimentell durch wirkliche Herstellung der Farbengleichungen als drei kontinuierliche Funktionen der Wellenlänge aufgefunden sind. Man nennt das die Eichfunktionen oder, in graphischer Darstellung, die Aichkurven für dieses Spektrum, natürlich bezogen auf drei vorab gewählte Eichfarben. Fig. 5 zeigt die Eichkurven vom Interferenzspektrum des Sonnenlichtes[1]) bezogen auf drei Spektralfarben.

1) Umgerechnet aus den „Elementarempfindungskurven“ (s. u.) Dietericis nach A. König und C. Dieterici, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 4. S. 241ff. 1892.

deren erste mit dem Rot der Endstrecke, die zweite mit dem Grün $\lambda = 505\,\mu\mu$, die dritte mit dem Violett der Endstrecke *der Reizart nach* übereinstimmt. Die *Intensitäten* der Eichlichter sind jedoch nicht so gewählt, wie sie an drei irgendwie bestimmten Stellen des Spektrums unmittelbar sich darbieten; sondern zunächst ihre *Verhältnisse* so, daß die drei Eichfarben gemischt Weiß, d. h. eine Farbe von der Reizart des Sonnenlichtes ergeben würden. Für die Eichkurven hat das, wie wir sogleich sehen werden, zur Folge, daß der zwischen einer von ihnen und der Abszissenachse eingeschlossene, algebraisch berechnete Flächeninhalt für alle drei der gleiche ist. Der Maßstab ist dann willkürlich so gewählt, daß dieser konstante Flächeninhalt gleich 1000 wird -- welche Willkür die schwierige Angabe der *absoluten* Lichtstärke der Eichfarben ersetzt bzw. entbehrlich macht.

Unabhängig von der besonderen Art des durchgeeichten Spektrums ist an diesen Eichkurven das *Verhältnis je dreier Eichwerte*, die zu derselben Abszisse (Wellenlänge) gehören; denn eine Vermehrung der Lichtstärke (Energie) an einer Stelle des Spektrums ändert alle drei Eichwerte in demselben Verhältnis. Durch die kontinuierliche Folge jener Verhältnisse ist die Gestalt des Spektralkegels affingeometrisch gegeben. Die genaue Gestalt der Eichkurven ist dagegen von der Energieverteilung noch weitgehend abhängig, so daß durch geeignete Wahl der letzteren *einer* von den Eichkurven sogar eine ganz beliebige Gestalt im sichtbaren Teil des Spektrums gegeben werden könnte[1]; die der beiden anderen wäre damit allerdings schon eindeutig festgelegt.

Zu einiger Unklarheit kann bei diesen und ähnlichen Überlegungen der Begriff der Energieverteilung des vorgelegten Spektrums führen. Man hat darunter keineswegs etwa die Wellenfunktion $\Phi(\lambda)$ — im oben definierten Sinn — der Lichtquelle zu verstehen, die zur Erzeugung des Spektrums dient. Die Energieverteilung hängt nicht nur von dieser, sondern auch von der Art der spektralen Zerlegung ab.

Betrachten wir einen Raumpunkt im Spektrum, so wird er von dem Licht eines kleinen Wellenlängen*bereiches*, λ bis

---

1) Nur an dem *Vorzeichen* des Eichwertes läßt sich nichts ändern!

$\lambda + \Delta\lambda$ getroffen. Wie groß dieser Bereich ist, hängt von der Stärke der Dispersion $dx/d\lambda$ (wo x eine Raumkoordinate entlang dem Spektrum) und von der Breite des Spalt*bildes* ab. Die Wellenlängenfunktion *des Spektrallichtes*, $\varphi(\lambda)$, das in dem hervorgehobenen Raumpunkt herrscht, ist überall Null, außer zwischen λ und $\lambda + \Delta\lambda$; hier kann sie als konstant gelten, und stimmt bei geeigneter prismatischer Anordnung bis auf die Reflexionsverluste mit $\Phi(\lambda)$ der Lichtquelle überein. *Daß* hier $\varphi(\lambda)$ und $\Phi(\lambda)$ übereinstimmen, ist aber durchaus nicht so unmittelbar einleuchtend, wie in den meisten Darstellungen des Sachverhaltes stillschweigend angenommen wird, sondern ist eine Folge des *Sinussatzes der geometrischen Optik*, wonach bei jeder optischen Abbildung der räumliche Winkel eines (kleinen) beleuchtenden Strahlenkegels sich im umgekehrten Verhältnis der Flächenvergrößerung ändert, so daß das Produkt: Raumwinkelelement $\times$ Flächenelement konstant bleibt.

Das $\varphi(\lambda)$ eines Spektrallichtes ist also, was wir eine „Rechteckfunktion" nennen können. Für die Intensität wird es auf die *Fläche* dieses Rechteckes ankommen, also auf das Produkt: Höhe $\Phi(\lambda) \times$ Grundlinie $\Delta\lambda$. Dieses Produkt als Funktion von λ ist das, was wir unter der Energieverteilung verstanden wissen wollen. Von seinen beiden Faktoren ist nur der erste ausschließlich von der Lichtquelle, der zweite dagegen ausschließlich von der Art der Zerlegung abhängig.

Nach dem oben Gesagten ist $\Delta\lambda$ der Quotient aus Spaltbildbreite und Dispersion

$$\Delta\lambda = b : \frac{dx}{d\lambda}\,. \tag{4}$$

$\Delta\lambda$ ist also erstens im ganzen Spektrum proportional der Spaltbreite und hängt von der Wellenlänge aus zwei Gründen ab: erstens weil die Vergrößerung etwas variiert, zweitens weil die Dispersion — im prismatischen Spektrum *stark* — variiert. Arbeitet man in der Nähe des Minimums der Ablenkung, so kann die Variation von b vernachlässigt werden; *die gegen Violett stark anwachsende Dispersion gibt dann ein richtiges Bild von der Entstellung, welche die Lichtfunktion $\Phi(\lambda)$ der Lichtquelle durch die Art der Zerlegung erleidet.*

Arbeitet man mit einem Gitter und entwirft das Spektrum zu beiden Seiten der Gitternormale, so liegen die Verhältnisse *theoretisch* am einfachsten, weil sowohl b als $dx/d\lambda$ annähernd unabhängig von λ sind. Die Energieverteilung ist dann ein getreues Bild von $\Phi(\lambda)$, nämlich gleich $\Phi(\lambda)$ mal einem konstanten kleinen λ-Intervall. *Praktisch* sind allerdings gerade bei Gittern wegen des eigenartigen, völlig unübersehbaren Einflusses der *Furchenform* erhebliche, der Theorie schwer zugängliche Komplikationen zu fürchten. Demungeachtet halten wir uns berechtigt, im folgenden der Einfachheit halber die Rechnung stets nur für ein ideales Gitterspektrum anzusetzen; *wir werden also nach all diesen kritischen Zwischenbemerkungen für die Energieverteilung, d. h. für die Fläche unserer spektralen Rechteckfunktionen jetzt dennoch annehmen*

$$C \cdot \Phi(\lambda),$$

wo C eine kleine Konstante von der Dimension einer Länge, $\Phi(\lambda)$ die λ-Funktion der Lichtquelle bedeutet.

Wenden wir uns nun wieder der am Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe zu, zu einer gegebenen Wellenlängenfunktion, sagen wir $f(\lambda)$, den zugehörigen Farbvektor oder die drei Farbkoordinaten rechnerisch zu finden. Als bekannt setzen wir die drei Eichfunktionen $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ voraus für ein Spektrum von der eben betrachteten Energieverteilung. Teilen wir das sichtbare Wellenlängengebiet in n gleiche Abschnitte, etwa von der kleinen Länge C, so können wir das Licht $f(\lambda)$ auffassen als eine Superposition von n-Spektrallichtern, welche aus den im Spektrum direkt vorliegenden je durch Multiplikation mit dem Quotienten $f(\lambda)/\Phi(\lambda)$ hervorgehen. Die Koordinaten eines solchen Spektrallichtes sind

$$\frac{f(\lambda)\, x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{f(\lambda)\, x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{f(\lambda)\, x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)},$$

daher die Koordinaten der Farbe von $f(\lambda)$

$$\sum_1^n \frac{f x_1}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{f x_2}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{f x_3}{\Phi}. \tag{5}$$

Diese Summen dürfen wir mit hinreichender Genauigkeit durch bestimmte Integrale ersetzen. Wir finden also für die gesuchten Farbkoordinaten von $f(\lambda)$ die drei Zahlen:

$$\frac{1}{C}\int \frac{f x_1}{\Phi}\, d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int \frac{f x_2}{\Phi}\, d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int \frac{f x_3}{\Phi}\, d\lambda. \tag{6}$$

Was die Konstante C betrifft, so bietet ihre experimentelle Ermittelung meist kein besonderes Interesse. Man macht sie überflüssig durch die oben schon erwähnte Normierung der Eichfunktionen. Eine besonders einfache analytische Gestalt erhalten nämlich die Koordinaten desjenigen Lichtes, von dem das Spektrum entworfen wird: für $f = \Phi$ erhält man ja

$$(7) \qquad \frac{1}{C}\int x_1\, d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int x_2\, d\lambda, \quad \frac{1}{C}\int x_3\, d\lambda.$$

Ändert man nun den Maßstab von zweien der Eichkurven willkürlich derart ab, daß die drei Integrale gleich werden, so erhält das Beleuchtungslicht drei gleiche Farbkoordinaten, d. h. man hat damit *solche* drei Lichter der vorab gewählten Reizarten zu Eichlichtern gewählt, die, gemischt, mit dem Beleuchtungslicht gleichaussehen. Auf die *absolute* Lichtstärke der Eichfarben kommt dann in der Regel nicht mehr viel an, und ebensowenig darauf, ob das Beleuchtungslicht als Norm gewählt wird gerade in derjenigen Lichtstärke, in der es wirklich vorliegt oder in irgendeiner anderen, z. B. der C-fachen. Man darf darum — und pflegt das zu tun — den Maßstab aller drei Eichkurven proportional derart abändern, daß die drei Integrale irgendeinen runden Wert erhalten, etwa 1000; und kann dann, unter Fortlassung des Faktors $1/C$, geradezu das Tripel

$$1000, \quad 1000, \quad 1000$$

als Koordinaten des Beleuchtungslichtes ansprechen; freilich nicht in der wirklich vorliegenden Lichtstärke, sondern eben in der C-fachen.

Nach dieser Abmachung werden dann die Farbkoordinaten des Lichtes $f(\lambda)$

$$(6') \qquad \int \frac{f(\lambda)\, x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}\, d\lambda$$

usw. Man erkennt, daß zu ihrer Berechnung eigentlich nicht die gesonderte Kenntnis von $f(\lambda)$ und $\Phi(\lambda)$, sondern nur des Quotienten f/Φ als Funktion der Wellenlänge notwendig ist, den man als die *relative* Lichtfunktion des vorgelegten Lichtes bezogen auf das Beleuchtungslicht als Norm bezeichnen könnte. Für ein Licht $f(\lambda)$, das wir uns jetzt wieder in concreto vorliegend denken, ist die Aufnahme dieser relativen Lichtfunktion mit dem Spektrophotometer eine einfache Sache, wenn das Beleuchtungslicht, für dessen Normalspektrum die Eichkurven gelten, in concreto vorliegt. So läßt sich also diese zweite theoretische Methode der Koordinatenbestimmung auch für ein konkret vorgegebenes Licht, dessen $f(\lambda)$ von vornherein unbekannt ist, durchführen. Und zwar ist die Methode auch in diesem Falle mit Recht als eine *theoretische* zu bezeichnen, ungeachtet der spektrophotometrischen Messungsreihe, welche dazwischen tritt. Denn diese ist nicht eine farbenmetrische in unserem Sinne, es handelt sich dabei nur um einen Intensitätsvergleich von auch physikalisch ganz gleich zusammengesetzten Spektrallichterpaaren, der ebensogut von einem farbenblinden Beobachter oder von einem Bolometer geleistet werden kann (vgl. Einleitung). Das fundamentale Farbengleichheitsurteil spielt dabei nur eine Hilfsrolle, den souveränen Teil seiner Arbeit hat es durch Aufnahme der Eichkurven ein für allemal erschöpfend geleistet.

§ 8. Wechsel der Eichfarben oder des Koordinatensystems.

Es kann der Fall eintreten, daß man die Koordinaten einer Anzahl von Farben, etwa der Spektralfarben eines Spektrums oder auch noch anderer Farben *kennt* bezüglich eines bestimmten Eichfarbentripels und daraus die Koordinaten bezüglich eines neuen Eichfarbentripels ableiten will. Dazu müssen natürlich die neuen Eichfarben irgendwie eindeutig gegeben sein; wir wollen annehmen, daß ihre neun Koordinaten bezüglich der alten Eichfarben nach einer der angegebenen Methode ermittelt worden sind und numerisch vorliegen. Rechnerisch läuft die Aufgabe natürlich einfach hinaus auf die Transformation von *einem* auf ein *anderes* System affiner Vektorkoordinaten, d. h. die neuen Koordinaten werden homogen-lineare Funktionen der alten sein — eine affine Transformation, wie wir sie schon oben, freilich mit etwas anderer Bedeutung, kennen gelernt haben.[1])

1) *Oben*, § 5, hat es sich darum gehandelt, daß der gewöhnliche, euklidisch-metrische Raum allen möglichen affinen Transformationen unterworfen gedacht werden muß, um ihn von allen denjenigen Beziehungen zu befreien, die er für unsere Anschauung besitzt, die aber für den Farbenraum bedeutungslos sind. Ein Wechsel eines etwa schon gelegten Koordinatensystems war damit nicht verbunden, dieses mit allen etwa darin lokalisierten Farbvektoren wurde von der Transformation *mitgenommen*. *Jetzt behalten* alle Farbvektoren ihre Lage, es werden nur drei andere als Grundvektoren ausgesucht und *das* ist der Grund, warum die Koordinaten ihre Werte ändern.

Sei also F eine beliebige Farbe, F_1, F_2, F_3 die alten Eichfarben und

$$(8) \qquad F = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3,$$

ferner seien die neuen Eichfarben A, B, C und

$$(9) \qquad \begin{cases} A = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3, \\ B = b_1 F_1 + b_2 F_2 + b_3 F_3, \\ C = c_1 F_1 + c_2 F_2 + c_3 F_3. \end{cases}$$

Wir suchen die neuen Koordinaten von F, also drei Zahlen, sagen wir y_a, y_b, y_c, welche der Farbgleichung genügen sollen

$$(10) \qquad F = y_a A + y_b B + y_c C.$$

Setzen wir hier für A, B, C ihre Werte aus (9) und ordnen nach F_1, F_2, F_3, so kommt

$$(11) \qquad \begin{cases} F = (a_1 y_a + b_1 y_b + c_1 y_c) F_1 \\ \quad + (a_2 y_a + b_2 y_b + c_2 y_c) F_2 \\ \quad + (a_3 y_a + b_3 y_b + c_3 y_c) F_3. \end{cases}$$

Der Vergleich mit (8) ergibt die drei gewöhnlichen Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{cases} a_1 y_a + b_1 y_b + c_1 y_c = x_1, \\ a_2 y_a + b_2 y_b + c_2 y_c = x_2, \\ a_3 y_a + b_3 y_b + c_3 y_c = x_3; \end{cases}$$

aus denen die y eindeutig zu berechnen sind, wofern nur

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Das ist aber bekanntlich genau die Bedingung dafür, daß die drei zu A, B, C gehörigen Vektoren ***nicht komplanar*** seien, was selbstverständlich gefordert werden muß, wenn die drei Farben als Eichfarben verwendbar sein sollen.

Noch etwas rascher und übersichtlicher kommt man zum Ziel, indem man einfach für die *Verträglichkeit* der 4 Farbengleichungen (8) und (9), als homogene Gleichungen in F_1, F_2, F_3 und 1 aufgefaßt, die gewohnte Bedingung des Verschwindens der Determinante ansetzt

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} F & x_1 & x_2 & x_3 \\ A & a_1 & a_2 & a_3 \\ B & b_1 & b_2 & b_3 \\ C & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

So gewinnt man mit einem Schlag die definierende Farbengleichung für die neuen Koordinaten. Entwickelt lautet sie

$$(14') \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} F - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} A - \ldots\ldots = 0 ,$$

woraus sich ablesen läßt

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_a &= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} x_1 \cdot \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

usw. Vergleicht man das System dieser, wie vorausgesehen, linear homogenen Umrechnungsgleichungen für die Koordinaten mit den Farbengleichungen (9), so erkennt man, daß die Farbkoordinaten und die Farben selbst sich *kontragredient* transformieren; was trotz des höchst einfachen Sachverhaltes angemerkt zu werden verdient, weil zwischen diesen beiden Arten von Transformationsformeln nicht immer mit hinreichender Schärfe geschieden zu werden pflegt. Unsere Aufgabe erscheint damit allgemein gelöst.

Zwei besondere Fälle, für später wichtig, sind nun noch ins Auge zu fassen. Wie oben schon erwähnt, ist es sehr viel leichter, die *Reizart* einer Farbe mit Worten und Zeichen festzulegen, als auch ihre objektive Lichtstärke. Erst beide Angaben zusammen entsprechen der Angabe der ***Absolutwerte*** der Farbkoordinaten, während die Kenntnis der *Reizart* genau auf die Kenntnis der Koordinaten*verhältnisse* hinauskommt. Wir haben oben gesehen, daß man, wenn von den *ursprünglichen* Eichfarben nur die Reizarten gegeben bzw. gefordert sind, die dann noch unbestimmte Aufgabe der Koordinatenbestimmung dadurch zu einer hinreichend bestimmten machen kann, daß man die Flächengleichheit der drei Eichkurven fordert; man wählt damit zu Eichfarben *solche* Farben der drei geforderten Reizarten, die addiert das unzerlegte Licht ergeben, mit dessen Normalspektrum operiert wird. Da dieses unzerlegte Licht meistens einigermaßen den Namen Weiß verdient, wollen wir diese zur Normierung nützliche Bedingung die „Weißbedingung" nennen. Sei nun diese Weißbedingung für die *alten* Eichfarben erfüllt, d. h. sei

$$F_1 + F_2 + F_3 = W, \tag{16}$$

wo W die Farbe des unzerlegten Lichtes in irgendeiner bestimmten Intensität. Seien ferner die *neuen* Eichfarben nicht, wie bisher angenommen, genau bekannt, sondern nur ihre Reizarten, d. h. die 9 Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung (9) sind nicht genau bekannt, sondern in jeder Zeile ist noch ein Faktor unbestimmt, so daß das Koeffizientenschema zu ersetzen wäre etwa durch

$$\left|\begin{array}{lll} \lambda\, a_1 & \lambda\, a_2 & \lambda\, a_3 \\ \mu\, b_1 & \mu\, b_2 & \mu\, b_3 \\ \nu\, c_1 & \nu\, c_2 & \nu\, c_3 . \end{array}\right. \tag{17}$$

Eine bequeme Form der notwendigen und hinreichenden Ergänzung der noch unvollständigen Aufgabe zu vollkommener Bestimmtheit ist dann wieder die Forderung, daß auch

$$A + B + C = F_1 + F_2 + F_3 = W \tag{16'}$$

sein solle, d. h., daß die Weißbedingung auch in den neuen Koordinaten gefordert wird. Drückt man links durch F_1, F_2, F_3 aus und vergleicht die Koeffizienten, so ergibt sich

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\, a_1 + \mu\, b_1 + \nu\, c_1 = 1, \\ \lambda\, a_2 + \mu\, b_2 + \nu\, c_2 = 1, \\ \lambda\, a_3 + \mu\, b_3 + \nu\, c_3 = 1. \end{array}\right. \tag{18}$$

Diese Gleichungen liefern λ, μ, ν eindeutig, wenn die Determinantenbedingung (13) erfüllt ist.

Wir nehmen jetzt an, daß die Koeffizienten $a_1 \ldots c_3$ schon in dieser Weise normiert seien, kehren also wieder zu unserer ursprünglichen Bezeichnungsweise, ohne λ, μ, ν, zurück, wobei aber jetzt

$$(18') \qquad a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = 1.$$

Wir fragen uns noch, was das für die Koeffizienten der Transformation (15) zur Folge hat. Darüber belehrt uns folgende Umformung der Determinante

$$(19)\left\{\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1, & a_2+b_2+c_2, & a_3+b_3+c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

nebst zwei analogen Umformungen.

Während also die Forderung der Weißbedingung in beiden Koordinatensystemen für das Koeffizientenschema der Farbgleichungen (9) zur Folge hat, daß die drei Koeffizienten jeder *Kolonne* zur Summe 1 geben, geben dann in den Transformationsformeln (15) die Koeffizienten jeder *Zeile* die Summe 1.

Der zweite Spezialfall, den wir betrachten müssen, soll uns aufklären über die Veränderung, welche die drei *Eichkurven* beim Wechsel der Eichfarben erleiden. Die Transformation (15), gültig für das Koordinatentripel einer beliebigen Farbe, gilt natürlich auch für die kontinuierlichen Folgen der Eichwerte der Spektralfarben, wenn wir $x_1 \ldots x_3$ und $y_a \ldots y_c$ als die betreffenden Funktionen von λ auffassen. Jede neue Eichkurve ist also eine gewisse Superposition mit konstanten Koeffizienten von den drei alten.

Zunächst ist klar und geht aus den ausgeschriebenen Formeln (15) sogleich hervor, daß, wenn die *Reizart* (*Richtung*) der Eichfarben erhalten bleibt und bloß ihre Lichtstärke (Länge) abgeändert wird, daß dann die *Gestalt* der Eichkurven erhalten bleibt und nur jede mit einem konstanten Faktor multipliziert wird. Eine solche Veränderung wollen wir für den Augenblick als unwesentlich ansehen.

Nun betrachten wir zweitens den Fall, daß nur *eine* der Eichfarben, etwa F_3, abgeändert wird

$$A = F_1, \quad B = F_2,$$

und zwar soll F_3 auch nicht beliebig verschoben werden, sondern *in der Ebene* $F_1 F_3$. Das heißt die Vektoren F_1, F_3 C sind komplanar oder

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 = c_2 .$$

Es lautet also das Koeffizientenschema von (9)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{matrix}$$

In die Formeln (15) eingesetzt ergibt das

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_a &= x_1 - \frac{c_1}{c_3} x_3 , \\ y_b &= x_2 , \\ y_c &= \frac{1}{c_3} x_3 . \end{aligned} \right.$$

Eine Formveränderung erleidet also in diesem Falle *nicht diejenige Eichkurve*, deren zugehörige Eich*farbe abgeändert* worden ist, sondern nur *eine* der beiden anderen, und zwar *diejenige, deren Farbvektor als Schnitt der beiden erhalten gebliebenen Ebenen des Grunddreikantes erscheint. Dieser* Eichkurve superponiert sich die Eichkurve, deren Farbe abgeändert worden ist, mit einem gewissen Faktor $\left(-\frac{c_1}{c_3}\right)$.

Hätte man F_3 *beliebig* abgeändert, so hätte sich die dritte Eichkurve der ersten *und* der zweiten, je mit einem gewissen Faktor, superponiert. Dieses Resultat ist wichtig, weil es uns erkennen lassen wird, in welchem Grade die spektrale Verteilung der sogenannten *Grundempfindungen* durch die Versuche an Dichromaten festgelegt wird. Es kommen nämlich an gesunden Augen nur zwei Arten von Dichromasie vor, die sogenannte *Rotblindheit* bzw. *Grünblindheit*. Dadurch werden im Farbenraum zwei Richtungen als dem *Grundrot* und *Grundgrün* entsprechend ausgezeichnet. Die dritte vom Standpunkte der Young-Helmholtzschen Theorie zu erwartende Form der Dichromasie, die *Blaublindheit*, kommt nur an schwer erkrankten Augen vor, deren Angaben weit weniger zuverlässig sind. Die Richtung des *Grundblau* ist darum ziemlich unsicher. Unsere jetzige Betrachtung wird uns lehren, daß gerade die Verteilung der *Blauempfindung* im Spektrum durch diese Unsicherheit nicht berührt wird, sondern nur die Verteilungen von *Rot* und *Grün*, denen man je einen kleinen Bruchteil der Blauverteilung superponieren dürfte, ohne den Ergebnissen des Experimentes Gewalt anzutun.

§ 9. Irreelle Eichfarben. Die Young-Helmholtzsche Theorie.

Wir machen zunächst die einfache aber wichtige Bemerkung, daß rein rechnerisch natürlich die Möglichkeit vorliegt, die Farbkoordinaten auf beliebige drei Grundvektoren umzurechnen, auch auf solche, die entweder alle drei oder von denen ein oder zwei *außerhalb* der im § 6 beschriebenen Düte liegen, so daß ihnen keine durch ein Licht realisierbare Farbe entspricht. Auf diesem — und nur auf diesem — Wege kann man es erreichen, daß für alle reellen Farben alle drei Eichwerte positiv ausfallen; dazu muß das gewählte Grunddreikant die erwähnte Düte ganz umschließen, während jedes aus reellen Farbvektoren gebildete Dreikant, umgekehrt, von der Düte umschlossen wird. Und weil diese nicht selbst ein Dreikant ist, sondern teilweise gekrümmt, durchwegs aber konvex verläuft, wird es dann immer Farben geben, die aus den reellen Eichfarben nicht wirklich gemischt werden können, sondern einen oder zwei negative Eichwerte bekommen.

Natürlich müssen auch für solche *virtuelle Eichfarben*, auf die umgerechnet werden soll, ihre 9 Koordinaten bezüglich der alten, reellen, Eichfarben bekannt sein. Die Rechnung ist dann ganz die früher angegebene. Es wird aber nach dem dort gesagten auch genügen, wenn nur die virtuellen *Reizarten*, d. h. die *Richtungen* der neuen Grundvektoren oder analytisch: die 6 Koordinaten*verhältnisse* bekannt sind; die Absolutwerte lassen sich dann, wie dort, durch die Weißbedingung normieren, die neuen Grundvektoren ergeben dann, vektoriell addiert, das unzerlegte Licht in derselben Intensität, wie die alten, reellen Eichlichter.

Um ein Beispiel dafür zu geben, wie durch wirklich ausgeführte Farbmessungen Richtungen im Farbenraum eindeutig festgelegt werden können, die außerhalb der reellen Farbdüte fallen, führe ich die von König vorgenommene Umrechnung auf die von ihm sogenannten *Elementarempfindungen* an. Als Grunddreikant wird dabei das *kleinste Dreikant* gewählt, das die reellen Farben ganz umschließt. Zwei Eichfarben sind reell, nämlich die Endfarben des Spektrums (Richtung OR und OV, Fig. 3). Die dritte ist virtuell und fällt in die Schnittkante der ebenen Zwickel ROG und VOI. Diese Festlegung der dritten Reizart als Schnittlinie zweier Ebenen ist auch im Sinne der affinen Geometrie eindeutig.

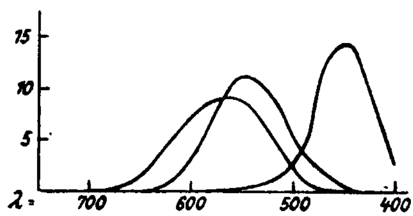

Fig. 6.

Fig. 6 zeigt die entsprechenden Eichkurven, die sogenannten Elementarempfindungskurven. Dabei sind die Lichtstärken der Eichlichter (Längen der Grundvektoren) durch die Weißbedingung festgelegt.

Die schon von Newton erkannte Dimensionstatsache für normale Trichromaten wurde anfangs, als die genaue Gestalt des Spektralkegels noch nicht bekannt war, unbedenklich in der Form ausgesprochen, daß alle Farben sich aus drei Grundfarben mischen lassen. Als solche wurden meist Rot, Grün. Blau, auch wohl Rot, Grün, Violett angegeben. Th. Young war der erste, der hieran die Hypothese knüpfte, daß als physisches Korrelat der Farbempfindung im Auge drei verschiedene Prozesse oder Erregungen gleichzeitig vorhanden sind, ohne einander zu stören. Die drei Grundfarben sollten nur je einen dieser drei Prozesse auslösen, alle übrigen Farben die drei Prozesse in wechselndem Verhältnis. Daraus würde sich ungezwungen die Gesamtheit der Mischungstatsachen erklären, wenn man nur annimmt, daß die Stärke mit der irgendein gemischtes Licht, sagen wir, den *ersten* Grundprozeß erregt, sich additiv zusammensetzt aus den Erregungsdifferentialen, die von seinen monochromatischen Bestandteilen für sich hervorgebracht würden. Wählt man die wahren

Grundfarben zu Eichfarben, dann wären die drei Eichwerte einer Farbe ein genaues Maß für die Erregungsstärke der drei Grundprozesse bei Darbietung dieser Farbe — wobei freilich die Einheit der Erregunsstärke für jeden Grundprozeß in willkürlicher Weise, z. B. durch die Weißbedingung festgesetzt wird.

Wir wollen uns hier von einer eingehenden Kritik dieser Hypothese, gegen die viele und schwere Einwände erhoben werden können, fernhalten. Am gewagtesten erscheint es, daß dabei jeder *Farbe in unserem metrischen Sinn* drei quantitativ bestimmte Erregungsstärken, also doch wohl ein ganz bestimmter Zustand der betreffenden Netzhautstelle zugeordnet wird. Woher denn kommt es, fragt man sich, daß bei identischem Zustand der Netzhautstelle so ganz verschiedene *Empfindungen* wie Braun und Goldgelb auftreten? Anhänger der Theorie lassen sich dann auch leicht dazu verleiten, diese Verschiedenheit der Empfindung hinwegdisputieren zu wollen und durch „unbewußte Schlüsse" zu erklären. Nun ist es zwar möglich, daß das physiologische Korrelat dieser Empfindungsverschiedenheit wenigstens teilweise nicht in der Retina, sondern zentripetal gelegen ist (Zonentheorie von v. Kries); aber keineswegs fällt es zusammen mit dem physiologischen Korrelat der *Vernunfttätigkeit* (wie das Wort „Schluß" andeutet), sondern höchstens mit dem des *anschauenden Verstandes*. Was wir *mindestens* voraussetzen müssen, um die Hypothese in der einfachen Form aussprechen zu dürfen, wie es oben geschehen, ist: gleicher Akkommodationszustand des Auges in allen Fällen. Denn daß bei gleichem Licht und, sagen wir nur, verschiedener *Pupillenweite* die gleichen Erregungsstärken ausgelöst werden, wäre natürlich ein Nonsens. Dieser Punkt brauchte uns aber für den gegenwärtigen Zweck nicht zu beschweren, weil *Farbengleichungen* auf der Netzhautmitte jedenfalls vom Akkommodationszustand unabhängig sind.

Ungeachtet dieser Schwierigkeiten, auf die mit besonderem Nachdruck hingewiesen zu haben das Verdienst E. Herings ist, erweist sich die Youngsche Hypothese doch unentbehrlich als *Arbeitshypothese*, weil sie bis jetzt die einzige ist, die eine einfache Zusammenfassung der Messungsergebnisse ermöglicht.

Die Bemerkungen am Anfang dieses Paragraphen sagen uns nun sofort, daß als Grundfarben im Sinne der Youngschen, von Helmholtz und König weiter ausgebauten. Theorie keinesfalls drei reelle Reizarten gelten können, weil aus ihnen nicht wirklich alle anderen mischbar sind. Man könnte allerdings auf das Auskunftsmittel verfallen, daß man *zweisinnige* Erregungsprozesse annimmt, die bei positivem Eichwert in der einen, bei negativem in der anderen Richtung in Gang gesetzt werden. Täte man das, so hätte man aber wieder die Auswahl zwischen *allen möglichen nichtkomplanaren Vektortripeln* im Inneren der Düte: die Mischungstatsachen an und für sich zeichnen keines von ihnen aus; aus je drei linear unabhängigen Farben lassen sich alle übrigen prinzipiell gleich gut mischen, sobald man auch die „uneigentliche" Mischung gelten läßt.

Bei näherer Überlegung erscheint es nun aber durchaus nicht ungereimt, daß den Grundfarben nicht Richtungen im Inneren, sondern außerhalb der Düte entsprechen könnten, virtuelle Reizarten, derart, daß die Düte ganz von dem Grundfarbendreikant umschlossen wird. Denn das bedeutet ja nur: kein Licht löst ausschließlich *einen* Grundprozeß aus, sondern jedes wirkt auf alle drei, nur in wechselndem Verhältnis. Auf Grund photochemischer Tatsachen, ebenso auf Grund elektromagnetischer Resonanzphänomene (wenn man etwa dergleichen zum Ausbau der Theorie heranziehen wollte) erscheint ein solcher Sachverhalt sogar weit wahrscheinlicher, als daß immer zwei von den doch wohl ähnlichartigen Prozessen völlig unempfindlich sein sollten gegen ein bestimmtes Strahlengemisch, auf das der dritte stark anspricht.

Es wäre also gar kein Anstand, z. B. die obigen drei Elementarfarben Königs (von denen übrigens nur eine, das Grün, virtuell ist) als Grundfarben anzusprechen und die in Fig. 6 gegebenen „Elementarempfindungskurven" als Verteilung der Erregungswerte der drei Grundprozesse im Sonnenspektrum. Das einzige, woran es auch jetzt wieder fehlt, ist ein *zureichender Grund* dafür, gerade dieses Dreikant vor allen anderen auszuzeichnen. Wieder leistet, sobald man sich einmal entschlossen hat, virtuelle Reizarten für die Grundfarben zuzulassen, jedes Dreikant, das die Farbendüte umschließt, vom Standpunkte der bis jetzt angeführten Tatsachen ganz genau dieselben Dienste, keines ist vor allen anderen ausgezeichnet.

§ 10. **Beziehung zwischen Dichromaten und Trichromaten.**

Erinnern wir uns nun der Tatsache, daß es Personen gibt, deren Farbenraum nicht drei, sondern nur zwei Dimensionen hat, die Dichromaten. Die Entwicklungen der §§ 5—9 ließen sich ganz ebenso wie für das normale trichromatische auch für das dichromatische Auge durchführen, sie würden nur um vieles einfacher sein, da wir es mit einem ebenen statt mit einem räumlichen Vektorbüschel zu tun hätten. Wir brauchen das aber nicht auszuführen, da wir sogleich sehen werden, daß sich der Farbenraum des Dichromaten in viel einfacherer und dabei viel bedeutungsvollerer Weise direkt aus dem Farbenraum des Trichromaten ableiten läßt auf Grund eines einfachen, aber weittragenden Erfahrungssatzes.

Es wäre von vornherein möglich, daß zwischen dem zweidimensionalen und dem dreidimensionalen Farbensehen überhaupt keine Beziehung besteht, daß Lichtgemische, die dem Farbentüchtigen gleich erscheinen, vom Farbenblinden verschieden gesehen werden und umgekehrt; nur wäre im Ganzen die Mannigfaltigkeit von untereinander verschiedenen Lichtern für den Farbenblinden kleiner.

Tatsächlich liegt die Sache aber so, daß beim Einstellen einer Farbgleichung zwar der Farbenblinde meistens fehlgreift – vom Standpunkte des Farbentüchtigen; der Farbentüchtige dagegen — vom Standpunkte des Farbenblinden — niemals. Wenn man sich also die Ausdrucksweise gestattet (die wohl noch keiner Theorie präjudiziert), daß der Trichromat an jedem Licht *drei*, der Dichromat *zwei Merkmale* unterscheidet, so macht es den Eindruck: der Farbenblinde unterscheidet an einem Licht nicht *andere*, sondern *zwei von den* Merkmalen, die es auch für den Farbentüchtigen hat, für das dritte fehlt ihm jede Wahrnehmung. Zwei Lichter, die in allen drei Merkmalen übereinstimmen, anerkennt er als gleich. Soll er dagegen selbst zwei Lichter gegeneinander abgleichen, so werden sie sich in der Regel in dem dritten Merkmal, worauf er nicht geachtet hat, unterscheiden und darum dem Farbentüchtigen ungleich erscheinen.

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, daß man im Sinne der Young-Helmholtzschen Theorie versuchen wird, als diese „drei Markmale" die Erregungsstärken der drei Grundprozesse anzusprechen. Man wird erwarten, daß es drei

Typen von Farbenblinden gibt, solche denen der erste, zweite, dritte Grundprozeß fehlt. Damit würde die Theorie eine starke Stütze erhalten.

Veranschaulichen werden wir uns das Farbensehen eines Dichromaten im dreidimensionalen Farbenraum am besten in der Weise, daß wir durch ein Kurvensystem alle jene Punkte (Vektorspitzen) verbinden, die ihm (völlig) gleich erscheinen. Es ergibt sich sofort, daß dieses Kurvensystem eine Schar paralleler Geraden ist.

Denn seien A und B zwei verschiedene Farben, die von einem bestimmten Dichromaten verwechselt werden:

$$A \overset{d}{=} B . \tag{21}$$

Daß es sich um eine *dichromatische* Gleichung handelt, wollen wir andeuten durch das d oberhalb des Gleichheitszeichens. Sei ferner C irgendeine dritte Farbe, so besteht jedenfalls auch für den Dichromaten die Identität

$$C \overset{d}{=} C . \tag{22}$$

Hierzu addieren wir die mit $\lambda \geqslant 1$ multiplizierte Gleichung (21) Seite für Seite:

$$C + \lambda A \overset{d}{=} C + \lambda B .$$

Wenn nun die trichromatische Farbe $C + \lambda (A - B)$ *existiert*, d. h. wenn der betreffende Vektor dem reellen Farbenraum angehört, so gilt für den Dichromaten:

$$C + \lambda (A - B) \overset{d}{=} C . \tag{23}$$

Und wenn

$$C + \lambda (B - A)$$

existiert

$$C + \lambda (B - A) \overset{d}{=} C : \tag{23'}$$

D. h. (23) gilt für jedes *reelle* λ, für welches die linksstehende trichromatische Farbe existiert. Diese Farben erfüllen aber das im reellen Farbenraum gelegene Stück jener Geraden, die durch den Farbenpunkt (Vektorspitze) der beliebigen Farbe C parallel zur Verbindungsgeraden der Vektorspitzen von A und B gezogen ist; denn ihr Farbvektor geht aus dem Farbvektor C durch Addition eines Multiplums der Vektordifferenz $(A - B)$

hervor, die zwar keiner reellen Farbe zu entsprechen braucht, als Vektor aber jedenfalls existiert.

Sobald also für einen Dichromaten nur *ein* Paar genauer Verwechslungsfarben bekannt ist, d. h. zwei Farben, die ihm ununterscheidbar sind, ohne es für den Farbentüchtigen zu sein, so weiß man schon, daß alle Farben, die auf einer Parallelen zur Verbindungsgeraden dieser beiden Farben liegen, ebenfalls verwechselt werden.

Da durch eine solche Parallelenschaar die Farbmannigfaltigkeit in der Tat auf zwei Dimensionen reduziert wird, so ist anzunehmen, daß damit auch schon die Gesamtheit der Verwechslungen des betreffenden Dichromaten erschöpft ist; d. h. daß von dem eben bewiesenen Satz auch die Umkehrung gilt: *nur* solche Farbenpaare erscheinen dem Dichromaten gleich, die auf derselben Parallelen liegen. Das läßt sich aber auch exakt beweisen.

Würde es nämlich auch nur ein einziges Paar von Verwechslungsfarben A', B' geben, derart, daß die Vektoren $A - B$ und $A' - B'$ *nicht* (direkt oder invers) parallel wären, so ließe sich folgern, daß *die ganze Ebene* von Farben

$$C + \lambda (A - B) + \mu (A' - B')$$

dem Dichromaten mit C gleich erscheint — soweit dieser Ausdruck überhaupt eine reelle Farbe darstellt; d. h. jenes Stück dieser Ebene, das im reellen Farbenraum liegt. Durch die Schaar paralleler Ebenen würde die Farbmannigfaltigkeit auf nur *eine* Dimension reduziert, was der Voraussetzung widerspricht, daß es sich um einen *Dichromaten* handeln soll.

Man erkennt nun sofort, daß, wenn man einem der Grundvektoren eines Farbkoordinatensystems, etwa dem Vektor F_1, die Richtung dieser Parallelenschar gibt, daß es dann für den betreffenden Farbenblinden auf die erste Koordinate einfach gar nicht ankommt. Solche und *nur* solche Farbenpaare erscheinen ihm gleich, die in der zweiten und dritten Koordinate übereinstimmen. Würde F_1 ein reeller Farbvektor sein, dann würden Farben dieser Reizart in jeder beliebigen objektiven Intensität von ihm überhaupt nicht wahrgenommen werden, weil jede Farbe mit den Koordinaten

$$(x_1, 0, 0)$$

mit der absoluten Dunkelheit

$$(0, 0, 0)$$

gleich erscheint. Man könnte sie als *Fehlfarben* des Dichromaten bezeichnen.

Tatsächlich kommt dergleichen nicht vor: Die Fehlfarbe des Dichromaten ist stets *virtuell.*

Würde es nun genau drei Typen von Dichromaten geben, d. h. würde man bei Aufsuchung der Parallelenschar im trichromatischen Farbenraum für eine große Zahl farbenblinder Personen immer auf eine von drei bestimmten Richtungen geführt werden, so wäre das eine sehr starke Stütze für die Young-Helmholtzsche Theorie. Die am Ende des vorigen Paragraphen erwähnte Unsicherheit in der Wahl der Grundfarben wäre behoben durch die unwiderstehlich sich aufdrängende Vermutung, daß diesen drei Typen je *einer* der Youngschen Grundprozesse *fehlt.* Man würde auf diese drei Richtungen als Koordinatenrichtungen transformieren und den so gewonnenen Farbkoordinaten eine tiefere Bedeutung zuschreiben denn irgendwelchen anderen, als Maßzahlen der Stärke, mit welcher die betreffende Farbe die drei Grundprozesse erregt. Jedenfalls, unabhängig von jeder Hypothese, würde *dieses* Zahlentripel den Vorteil bieten, daß es mit einem Blick erkennen läßt, nicht nur ob zwei Farben für den Farbentüchtigen gleich (oder von gleicher Reizart), sondern auch ob sie es etwa für eine der 3 Gruppen von Farbenblinden sind.

Einen Widerspruch oder mindestens eine sehr große Komplikation für unsere Theorie würde es bedeuten, wenn man auf *mehr als drei* distinkte Gruppen von Farbenblinden geführt würde.

Die Untersuchungen Königs und anderer haben nun ergeben, daß als physiologische Eigentümlichkeit gesunder Augen nur *zwei* Typen von Dichromasie vorkommen; die Fehlrichtungen (Richtung jener Parallelenschar) aller im übrigen gesunden Augen, die sich als dichromatisch erwiesen, fiel innerhalb der Versuchsfehler mit einer von zwei affingeometrisch bestimmten Richtungen des normalen trichromatischen Farbenraumes zusammen; diese Richtungen entsprechen übrigens, wie schon erwähnt, keiner reellen Farbe, die vom Ursprung aus parallel dazu gezogenen Vektoren liegen außerhalb der reellen Farbdüte.[1])

Man nimmt an, daß diese zwei Richtungen zwei von den drei virtuellen Grundfarben entsprechen, die aus gleich zu besprechenden Gründen als *Grundrot* und *Grundgrün*, und die zwei Dichromatentypen dementsprechend als *Rotblinde* und *Grünblinde* bezeichnet werden.

Der dritte von der Theorie geforderte Typus, die *Blaublindheit*, ist zwar auch beobachtet worden[2]), aber nur auf den erkrankten Netzhautteilen schwer havariierter Augen (Retinitis, Ablatio retinae), die auch in anderer Hinsicht, besonders in der Sehschärfe, schwer beschädigt waren. Die Ermittlung der Fehlrichtung auf Grund eingestellter Farbgleichungen war dadurch sehr erschwert, immerhin scheint es, daß auch diese Blaublinden in der Fehlfarbe untereinander sehr angenähert übereinstimmen.

Fig. 7 zeigt die ungefähre Lage dieser drei Fehlrichtungen $F_1 F_2 F_3$ im Verhältnis zum Spektralkegel. Der Deutlichkeit halber wurde wieder das ganze Vektorbüschel mit einer an sich bedeutungslosen Ebene zum Schnitt gebracht und die Spur auf dieser Ebene gezeichnet. Nur beiläufig möchte ich erwähnen, daß auch diese zweidimensionale Schnittfigur allein an Stelle des räumlichen Vektorbüschels zur Darstellung der gesamten niederen Farbenmetrik verwendet werden kann und sogar viel häufiger Anwendung gefunden hat, als das räumliche Bild. Man bezeichnet sie als Farbenebene oder Farbendreieck. Für die dritte Koordinate wird Ersatz geschaffen dadurch, daß man die Farben gleicher Reizart, die sich in demselben Punkt abbilden, unterscheidet durch eine Quantitäts- oder Massenzahl, die bei gleicher Reizart der Länge des betreffenden Vektors

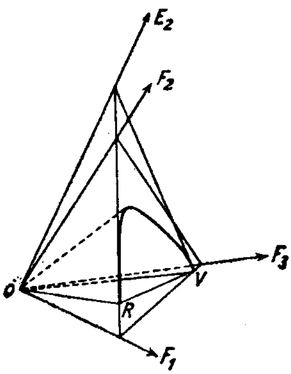

Fig. 7.

1) Man vgl. hauptsächlich: A. König u. C. Dieterici, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 4. 241ff. 1892.

2) Vgl. besonders A. König, Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 8. Juli 1897. S. 718ff.

proportional genommen wird. Durch geeignete Wahl des Proportionalitätsfaktors für die drei Koordinatenrichtungen (wodurch derselbe dann auch für jede andere Richtung festgelegt ist) läßt es sich erreichen, daß in der Farbenebene die bekannte Newtonsche Schwerpunktskonstruktion gilt, wonach der Ort der Mischfarbe als Schwerpunkt der Komponenten, ihre Masse als Summe von deren Massenzahlen gefunden wird. Kurven *gleicher Farbe* für den Farbenblinden lassen sich in der Farbebene wegen der fehlenden dritten Koordinate nicht anschaulich machen, wohl aber *Kurven gleicher Reizart*: es sind die Geraden durch den *Fehlpunkt* (Spur der Fehlrichtung). Die Rolle, welche für den Farbenraum die affine Geometrie spielt, spielt für die Farbebene die ebene projektive Geometrie; die Vektorkoordinaten sind projektive Dreieckskoordinaten bezüglich der Spur des Koordinatendreikantes.

Allerdings ist dieses Entsprechen der beiden Geometrien kein ganz genaues, da man die projektiven Koordinaten *baryzentrisch* wählen (d. h. den sogenannten „Einheitspunkt" in den Schwerpunkt des Koordinatendreiecks verlegen) muß, wenn die einfache Newtonsche Schwerpunktskonstruktion gelten soll.

Kehren wir nach dieser Digression wieder zu der räumlichen Darstellung zurück, die wir nicht nur wegen ihrer größeren Einfachheit, sondern deshalb in den Vordergrund rücken, weil sie im zweiten Teil dieser Arbeit allein Anwendung finden kann.

Wie erwähnt, sind die Richtungen F_1 und F_2 durch die Gleichungen der Rot- und Grünblinden einigermaßen sichergestellt. Es besteht die Eigentümlichkeit, daß die Ebene $F_1 F_2$ mit der Ebene ROG der ersten Zwischenstrecke zusammenfällt, so daß nicht nur das Endrot des Spektrums, sondern auch die Scharlach- und Orangefarben bis etwa $\lambda = 630$ als „Mischungen" von Grundrot und Grundgrün allein erscheinen; der Blauprozeß wird durch Lichter dieser Wellenlänge überhaupt nicht erregt.

Es muß erwähnt werden, 1. daß König zur Vereinfachung der Darstellung *sich bemüht hat*, den *Kompromiß* zwischen den experimentell ermittelten Fehlrichtungen, die in Wahrheit natürlich doch über zwei kleine Raumwinkelbereiche gestreut sind, so zu schließen, daß das eben erwähnte Resultat zustande kommt; 2. daß das Auge in diesem λ-Bereich gegen kleine Beimischungen von spektralem Blau oder Violett recht unempfindlich ist. Es wäre darum immerhin möglich, daß die Ausschaltung des dritten Grundprozesses in diesem λ-Bereich doch nur eine angenäherte ist.

Im Verhältnis zur zweiten *Elementar*farbe Königs (E_2 in Fig. 7), die wir oben (§ 9) verwendet haben, liegt das Grundgrün F_2 *näher an Rot.*

Die Lokalisation von F_3 ist, wie erwähnt, recht unsicher; ja, die Lage, die wir ihr hier im Anschluß an König gegeben haben (komplanar mit F_1 und Endviolett), entspricht sogar Königs eigenen Versuchen an Blaublinden recht schlecht. Solange eine sichere Lokalisation nicht möglich ist, wollen wir aber an dieser, einmal historisch gewordenen Lage nicht rütteln und geben in Fig. 8 die sogenannten Grundempfindungskurven Königs, d. i. die Eichkurven vom Interferenzspektrum

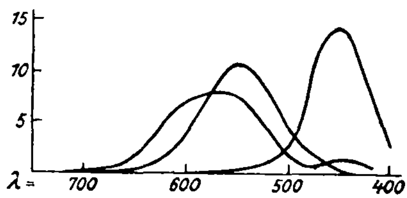

Fig. 8.

des Sonnenlichtes bezogen auf Grundvektoren von den Richtungen $F_1 F_2 F_3$ und solcher Länge, daß sie komponiert die Farbe des Sonnenlichtes ergeben. Es geben also z. B. die Ordinaten der Rotkurven die spektrale Verteilung der Erregungsstärke des Rotprozesses, wenn man der Reihe nach die Farben des erwähnten Spektrums auf das Auge wirken läßt; dabei sind die Einheiten der Erregungsstärke für die drei Prozesse willkürlich so gewählt, daß auf Sonnenlicht (oder ein ihm gleich erscheinendes) alle drei in *gleicher* Stärke ansprechen.

Es muß noch begründet werden, warum wir von einem Rot-, Grün-, Blauprozeß u. dergl. sprechen und nicht einfach von Prozeß Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3, da es sich doch nicht um reelle Farben handelt, sondern die Empfindung, die der Erregung nur *eines* Prozesses allein entspricht, uns völlig unbekannt ist.

Verbindet man eine Grundfarbenrichtung und die Weißrichtung durch eine Ebene, so schneidet diese die Farbdüte in zwei Geraden, von denen eine in dem spitzen Winkel zwischen Weiß und Grundfarbe liegt; Vektoren dieser Richtung lassen sich aus Weiß und Grundfarbe additiv zusammensetzen, die betreffenden Farben erregen also den Grundprozeß zwar nicht isoliert, aber es treten nur noch hinzu solche Erregungsstärken aller drei Prozesse, die für sich Weiß ergeben würden. Nun haben wir aber eine anschauliche Vorstellung davon, wie eine *reelle* Farbe bei solcher Hinzufügung von Weiß sich verändert; wir pflegen zu sagen, daß sich dabei der Farbton nicht oder wenig verändert, sondern nur die Farbensättigung. Wir dürfen darum wohl annehmen, daß die Farbe jener zwischen Weiß und Grundfarbe gelegenen, mit ihnen komplanaren Richtung sich zu dem Eindruck, den die als möglich gedachte, isolierte Erregung des betreffenden Grundprozesses hervorrufen würde, so verhält, wie die weißliche Abwandlung einer Spektralfarbe zu dieser Spektralfarbe selbt. Wir glauben also, daß jene Schnittfarbe wenigstens ein qualitatives Bild der Grundfarbe gibt, die als noch gesättigtere Abwandlung davon zu denken ist.

Diese weißlichen Repräsentanten der Grundfarben sind nun ein Purpurrot, komplementär etwa zu $\lambda = 494$, ein Grün etwa $\lambda = 505$ und ein Blau etwa $\lambda = 470$ (komplementär zu $\lambda = 573$); das rechtfertigt unsere Bezeichnungsweise.

Auf Grund der Darstellung des Verhältnisses zwischen dichromatischem und trichromatischem Sehen durch die Parallelenschar läßt sich übrigens sofort erkennen, daß diesen Spektrallichtern auch eine unmittelbare experimentelle Bedeutung zukommen sollte, was für die ersten beiden auch wirklich zutrifft. $\lambda = 494$ erscheint dem Rotblinden, $\lambda = 505$ dem Grünblinden ununterscheidbar von einem trichromatischen Weiß (Sonnenlicht) bestimmter Intensität. Daß die beiden „neutralen Punkte" einander so nahe liegen und durch Ungenauigkeit der Versuche oder Färbung der Augenmedien zuweilen sogar in der Reihenfolge vertauscht erscheinen, war einer der Gründe, daß der fundamentale Unterschied zwischen den Rot- und Grünblinden so lange geleugnet wurde.

Für einen Blaublinden wären zwei neutrale Punkte etwa bei $\lambda = 470$ und $\lambda = 573$ zu erwarten. Tatsächlich wurde an den oben erwähnten Schwerkranken immer bloß einer zwischen

$\lambda = 560$ und $\lambda = 570$ beobachtet. Dies und noch eine andere Unstimmigkeit machen die Lage von F_3 zweifelhaft, wenn man jenen Versuchen überhaupt eine Bedeutung für die Festlegung der Grundfarben beimessen will. Will man das aber nicht, dann ist natürlich die Wahl von F_3 *völlig* willkürlich.

Wir haben schon oben erwähnt, daß eine eventuelle Änderung dieser Lage die Gestalt der Blaukurve nicht berühren würde, wohl aber die der Rot- und Grünkurve; diesen beiden Kurven wäre je noch ein gewisser Bruchteil der Blaukurve zu superponieren, welche Bruchteile von der neuen Lage von F_3 abhängen.

Die Sehweise der *Monochromaten* kann leider zur genaueren Bestimmung der Grundfarben nicht benützt werden, da zwischen ihnen einerseits, den Di- und Trichromaten andererseits keine so einfache Beziehung besteht, wie zwischen diesen untereinander. In der stäbchenfreien Netzhautmitte, die uns in dieser Abhandlung allein beschäftigt, sind die Monochromaten sehr wahrscheinlich überhaupt blind; in den parazentralen und peripheren Teilen stimmt ihre Erregbarkeitskurve nicht etwa mit einer der drei normalen Grundempfindungskurven, sondern mit der normalen Erregbarkeitskurve des farblosen Dämmerungssehens überein, das im stäbchenfreien Bezirk ebenfalls völlig fehlt.

Auch auf die interessanten Fälle *anomaler Trichromasie* wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen.

(Eingegangen im März 1920.)