1870. ANNALEN №. 11.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CXLI.

I. *Ueber eine neue optische Methode, die Schwingungen tönender Luftsäulen zu analysiren; von Toepler und Boltzmann in Graz.*

§. 1.

Bereits im 128. Bande (S. 108) dieser Annalen wurde von Toepler durch eine Reihe von Versuchen auf die Vortheile hingewiesen, welche das stroboskopische Prinzip bei der Beobachtung schwingender Bewegungen bietet. Betrachtet man einen schwingenden Körper z. B. eine Saite bei *intermittirendem* Lichte, und ist die Schwingungsdauer der Saite nur sehr wenig verschieden von dem Zeitintervall, in welchem die intermittirende Lichtquelle je einmal aufleuchtet, so sieht man die Saitenschwingung mit allen ihren Eigenthümlichkeiten ganz langsam stroboskopisch reproducirt. Die Schwingungsdauer der stroboskopischen Bewegungserscheinung berechnet sich aus der Differenz zwischen Lichtintermittenz und Saitenschwingung genau so, wie die Schwebungen zweier sehr nahe gleichgestimmter Töne. Man kann also unter Beachtung der nöthigen Vorsichtsmafsregeln stehende Schwingungen vieler Körper fast beliebig verlangsamt sehen und unter günstigen Verhältnissen ihre Details mit Mefsinstrumenten verfolgen, wie jede andere langsame Bewegungserscheinung.

Vom gröfsten Interesse war es nun, bei den Pfeifentönen unmittelbar die *Luftschwingungen* beobachten zu können, da durch solche Beobachtungen eine Reihe von bis jetzt experimentell sehr schwer zugänglichen Fragen (z. B. die Intensitäts- und Phasenverhältnisse der Partialtöne eines Pfeifenklanges) der Beobachtung und Messung unterworfen werden können. Nach einem Vorschlage von Boltzmann war ein günstiger Erfolg zu erwarten, wenn die Strahlen ein und derselben intermittirenden Lichtquelle zur Hälfte durch ruhende, zur Hälfte durch schwingende Luft geführt, und dieselben später zur Interferenz gebracht werden. Da hierbei die letzteren Strahlen durch den Wechsel von Verdichtung und Verdünnung abwechselnd eine Verzögerung und eine Vorauseilung erfahren, *so mufs eine schwingende Bewegung der Interferenzstreifen entstehen, welche wegen der Intermittenz der Lichtquelle nach dem stroboskopischen Princip verlangsamt erscheint*, also durch Messung verfolgt werden kann. Aus der gemessenen Bewegung der Interferenzstreifen läfst sich alsdann ohne Schwierigkeit die Bewegung der schwingenden Luftsäule berechnen. Die gebotenen Vortheile sind augenfällig, da man neben der Art und Intensität der Bewegung auch gleichzeitig mit gröfster Schärfe die Schwingungsdauer bestimmen kann.

Es wurde zu dem Ende von Toepler ein Apparat construirt, welcher den Vorschlag zunächst auf gedeckte Pfeifen anzuwenden erlaubt. Mit diesem Apparat haben wir eine Reihe von Messungen über Intensitätsverhältnisse usw. der Luftschwingungen angestellt. Dabei hat sich thatsächlich herausgestellt, dafs nach möglichster Vermeidung der praktischen Schwierigkeiten durch das nunmehr erweiterte vibroskopische Princip ein Beobachtungsverfahren geboten ist, welches sich in Bezug auf die Messung kleiner Zeitgröfsen unbedenklich als ein sehr genaues Hülfsmittel bezeichnen läfst, wie die im zweiten Paragraphen mitgetheilten Resultate beweisen.

Beschreibung des Apparates. Zur Herstellung des stroboskopischen Sehens mufste zunächst eine bequem und genau regulirbare, intermittirende Lichtquelle geschaffen werden. Es wurde zu diesem Zwecke die bekannte Helmholtz'sche Unterbrechungsgabel an den beiden Zinken mit leichten Spaltenschirmen versehen, welche dicht hintereinander stehen und bei der Anregung der Gabel in entgegengesetztem Sinne schwingen. Die Spalten lassen nur beim Uebereinandergleiten in der Mittelstellung je einmal ganz kurze Zeit die Strahlen einer dahinter gestellten Lichtquelle hindurch. Fig. 1, Taf. IV zeigt die Zinkenenden *a* und *b* der horizontal gestellten Gabel. Auf das Zinkenende *a* ist ein Schuh fest aufgeschraubt, welcher ein sehr leichtes Blechrähmchen *c* mit rechteckiger Oeffnung trägt. Auf dieses Rähmchen kann durch kleine Schrauben eine dünne Blechplatte *d* aufgeschraubt werden, so dafs die rechteckige Oeffnung in *c* bis auf eine Spalte von beliebig zu wählender Weite verdeckt ist. An dem unteren Stimmgabelende *b* ist eine ganz analoge Vorrichtung angeschraubt, bei welcher jedoch alle Theile in umgekehrter Lage geordnet sind. Die beiden Spaltenvorrichtungen schwingen so nahe hintereinander, als es ohne gegenseitige Störung zuläfsig ist. *EE* sind die mit verstellbaren Fortsätzen *FF* versehenen Pole des Elektromagneten, *G* und *G* die auf den Zinken verschiebbaren Laufgewichte zum Tieferstimmen. Eine Erhöhung des Tones der Gabel erhält man, indem man die parallelen Beine der Gabel durch eine in der Figur nicht weiter angedeutete, eigenthümliche Klemmvorrichtung vom Grunde der Gabel aus successive verkürzt.

Die obere Gabelzinke dient zur Stromunterbrechung in den Windungen des Elektromagneten *E* und somit zur selbstthätigen Unterhaltung der Schwingungen. Es tritt nämlich bei *a* ein gekrümmter Stift hervor (in der Figur nicht abgebildet), welcher seitlich in ein Quecksilbernäpfchen eintaucht, so dafs der durch die Gabel und den Elektromagneten geleitete Strom beim Aufwärtsschwingen unterbrochen wird, wie bei der Helmholtz'schen Gabel. Man kann jedoch die Excursionen beträchtlich steigern, wenn man dafür sorgt, dafs die Stromschliefsung während der Aufwärtsbewegung des Gabelendes *a* sehr merklich länger dauert, als bei der Abwärtsbewegung. Diesen Zweck erreicht man am einfachsten durch einen kupfernen, am Ende conisch verjüngten Unterbrechungsstift. Derselbe ist ganz mit isolirender Substanz überzogen und nur seine Endfläche, welche versuchsweise bis auf einen passenden Querschnitt abgefeilt wird, ist nackt. An diesem adhärirt das Quecksilber durch Amalgamation leicht in Form eines Fadens. Wird nun die Gabel stark angeschnellt, indem man gleichzeitig den Quecksilbernapf durch Handhabung einer Schraube von unten nähert, so wachsen die Excursionen sehr rasch und das Auge sieht den Unterbrechungsfunken um etwa 2^{mm} gewissermafsen über der Quecksilberoberfläche schweben. Unsere Gabel giebt bei ihren tieferen Tönen mit einem Zink-Eisenbecher leicht Excursionen von 6 bis 7^{mm} [1]), und schwingt so viele Stunden fort. Das Quecksilber wird nicht mit Alkohol oder Wasser bedeckt.

Da bei unserer Einrichtung die Relativbewegung beider Spalten gleich zu setzen ist der doppelten Bewegung einer einzigen Spalte, so ist leicht zu erkennen, dafs man zur Herstellung des stroboskopischen Sehens ziemlich weite Spalten anwenden kann, was mancherlei Vortheile hat. Man kann die Spaltenvorrichtung natürlich sehr bequem auch zur subjectiven Beobachtung von Schwingungen benutzen, indem man durch die vibrirenden Spalten mit Auge oder Fernrohr nach dem abgestimmten, schwingenden Körper hinblickt. Bei den vorliegenden Beobachtungen waren die Spalten stets vor der Oeffnung eines Heliostaten aufgestellt, um ein intermittirendes Strahlenbündel zu erhalten. Hervorzuheben ist für *alle* Benutzungen der Gabel, dafs sich die Spalten genau beim Durchgang durch ihre Ruhelage und nicht früher oder später decken müssen, da sonst die Lichtintermittenz, welche zweimal während einer Gabelschwingung wiederkehrt, zwei ungleiche Zeitintervalle bildet.

1) Bemerkung. Denselben Erfolg könnte man, wie leicht einzusehen auch dadurch erzielen, dafs man zwei genau gleichgestimmte Unterbrechungsgabeln derart combinirt, dafs je eine den Strom des Elektromagneten der anderen unterbricht. Die Schwingungen würden einen Phasenunterschied von $\frac{1}{4}$ Schwingung annehmen, so dafs jede Gabel nur während der günstigen Hälfte ihrer Bewegung von ihrem Magneten afficirt würde.

Damit das stroboskopische Sehen deutlich werde, mufs die Zeit, während welcher Licht durch die Spalten dringen kann, immer klein seyn im Verhältnifs zu der Zeit einer Halbschwingung der Gabel. Nennt man letztere Zeit T, die Zeit des Lichtdurchganges t, ferner b die Spaltenweite und a die Amplitude der Bewegung, so findet sich leicht, dafs

$$t = \frac{2T}{\pi} \cdot \arcsin \frac{b}{2a},$$

oder bei kleiner Spaltweite

$$\frac{t}{T} = \frac{b}{\pi a} \text{ ist.}$$

Ist also $b = 1$ Mllm., $a = 3$ Mllm., so ist das Verhältnifs

$$\frac{t}{T} \text{ nahe } = \frac{1}{9},$$

was bei den Versuchen bereits genügt. Trägt man die Zeit als Abscisse, die Helligkeit als Ordinate auf, so gestaltet sich der periodische Verlauf der Helligkeit graphisch, wie in Fig. 2 Taf. IV [1]).

Vor der Beschreibung der andern Theile des benutzten Pfeifenapparates verweisen wir zunächst auf die Skizze Fig. 3, aus welcher die allgemeine Zusammenstellung ersichtlich ist. Auf die richtige Wiedergabe der Dimensionen ist hierbei nicht Rücksicht genommen; dieselben finden sich weiter unten. H ist ein Heliostat, in dessen Rohr eine mikrometrisch zu regulirende Spalte s eingesetzt ist. Dicht vor derselben werden die vibrirenden Stimmgabelspalten v genau in demselben Niveau aufgestellt. Auch die Spalte s hat bei den Versuchen, wie unten zu ersehen, einen bestimmten Zweck. Die horizontalen Lichtstrahlen gelangen von v aus auf das Ende der lothrecht gestellten Pfeife P. Dieselbe hat eine dünne, genau eben geschliffene Deckplatte e von Eisen, welche hermetisch an die Plangläser gg schliefst. Letztere bilden zur Hälfte Theile der Pfeifenwand, zur Hälfte ragen sie über die Platte e hervor. Die Pfeife ist

1) Auch Prof. Mach in Prag benutzt die elektromagnetische Gabel, jedoch mit einfachem Spaltenschirm zu vibroskopischen Versuchen.

so aufgestellt, dafs die von *v* ausgehenden Lichtstrahlen halb durch die Pfeife, halb dicht über der Deckplatte durch die beiden Glasscheiben *gg* gehen. In der Richtung der Strahlen folgt dann ferner das Interferenzprisma *f*, mit seiner brechenden Kante ebenfalls genau in die Ebene der Platte *e* eingestellt. Wird durch einen Schirm *d* mit entsprechender Oeffnung störendes Seitenlicht abgehalten, so kann man sehr leicht in einiger Entfernung hinter der Pfeife die Fresnel'schen Interferenzlinien beobachten. Zu dem Ende ist ein Rohr *k* mit Lupe *o* und Fadenkreuz *i* in der Strahlenrichtung aufgestellt, so dafs das beobachtende Auge den Kreuzungspunkt der Fäden auf der Interferenzerscheinung deutlich projicirt sieht.

Sehen wir vorläufig von weiteren Einzelnheiten ab, so ist klar, dafs durch das Tönen der Pfeife die Lichtstrahlen, welche durch die Pfeife gingen, im Momente der Luftverdichtung eine Verzögerung, bei der Luftverdünnung eine Vorauseilung erfahren. Im ersten Falle müssen die Interferenzstreifen nach abwärts, im zweiten nach aufwärts vor dem Fadenkreuz rücken, wie ohne Erörterung zu verstehen ist. Sind die Stimmgabelspalten in Ruhe, so dafs also constant Licht auf die Pfeife fällt, so schwingt die Interferenzfigur so schnell wie der Pfeifenton. Daher wird die Erscheinung beim Anblasen der Pfeife sofort verworren, weil das Auge den Schwingungen nicht folgen kann. Wenn aber die Stimmgabel schwingt, das Licht also intermittirt, so tritt stroboskopisches Sehen ein und bei hinreichendem Einklange kann die Dauer einer Schwingung der Streifen sehr leicht bis auf 5 Sec. und mehr gebracht werden.

Soll die stroboskopische Bewegung der Interferenzfigur gemessen werden, so sind jedoch mancherlei Schwierigkeiten zu beachten, welche bei unserem Apparate aber glücklich beseitigt werden konnten. Zunächst ist die Bewegung der Interferenzstreifen bei einmaligem Durchgang des Lichtes durch die Pfeifendicke zwar sichtbar, aber viel zu klein zu genauen Messungen. Es wurde daher das Licht zwischen den Platten *gg* Fig. 3 Taf. IV sowohl innerhalb als aufserhalb der Pfeife durch Spiegelung oftmals hin und her geführt, bevor dasselbe auf das Prisma *f* gelangte. Die Beschaffenheit des gedeckten Pfeifenendes ist deutlicher aus Fig. 4 Taf. IV zu ersehen. Die Glasplatten *gg* waren kreisförmig und so genau planparallel, dafs sie mit dem Theodoliten geprüft keine mefsbare Ablenkung hindurchgehender Strahlen bewirkten. Auf der äufseren Seite wurden sie bis auf ein kleines Segment belegt, wie aus den schraffirten Theilen der Fig. 4 zu ersehen ist. Die Platten pafsten in halbkreisförmige Ausschnitte der Holzwände der Pfeife und waren 3 Mllm. dick, während die Wanddicke der Pfeife etwa 8 Mllm. betrug. Zuerst wurde nun die geschliffene Eisenplatte *e* auf die ganz ebenen Ränder der Pfeife aufgelegt und mit (in der Figur weggelassenen) Eisenschienen und Schrauben unwandelbar befestigt. Alsdann wurden die Glasplatten an die geschliffenen Kanten *rr* der Deckplatte dicht angelegt und mit Klebwachs am Holze leicht befestigt. Durch Druck mit dem Finger ist es nun bequem dahin zu bringen, dafs die spiegelnden Flächen genau parallel stehen, was daran zu erkennen ist, dafs beim Hineinschauen durch eine der unbelegten Stellen die vielfachen Spiegelbilder der Platte *e* genau eine einzige Ebene zu bilden scheinen. Auf diese Weise konnte es erreicht werden, dafs die in der Richtung von *s* Fig. 4 einfallenden Strahlen in und aufserhalb der Pfeife 11 mal die Pfeifendicke durchliefen und doch noch später sehr schöne Interferenzlinien zeigten (natürlich nur bei directem Sonnenlicht).

Nachdem in der eben besprochenen Weise die Spiegel justirt waren, wurde das ganze Pfeifenende zur vollkommenen Dichtung und Befestigung mit Wachs umgossen (natürlich mit Ausnahme des Theils der Deckplatte *e* gerade zwischen den Spiegeln). Es ist jedoch noch eine Schwierigkeit zu beseitigen, welche sich alsbald bei Vorversuchen herausstellte. Trotz der dicken Holzwände der Pfeife und der Verschraubungen am Ende derselben hat man bei starkem Tönen auf die Bewegung der Pfeifenwände Rücksicht zu nehmen. Durch das Mitschwingen der Wände entsteht nämlich eine Vibration der Spiegel, welche ohne Vorsichtsmafsregeln sogar eine weit gröfsere Bewegung der Interferenzfigur veranlassen kann, als der Wechsel der Luftdichte in der Pfeife [1]). Es genügte jedoch vollkommen, das Pfeifenende, bevor die Spiegel nach obiger Vorschrift eingesetzt wurden, von allen vier Seiten her in sehr starke, schwere, hufeisenförmige Klemmvorrichtungen sehr fest einzuspannen (auch diese sind in der Figur weggelassen). Ferner ist, wie Fig. 3 nur andeutet, das Interferenzprisma mit der Pfeifenwand fest verbunden. Natürlich würde eine Erschütterung des Prisma ebenso schädlich seyn, wie die der Spiegel. Aber jene Einklemmung des Pfeifenendes beseitigt diese Störungen hinreichend. Man hat aufserdem ein sehr bequemes Mittel, vor jedem Versuch den Einflufs der Wanderschütterung zu controliren. Man braucht nur die untere Hälfte der Glasscheibe *gg* Fig. 3 Taf. IV zu verdecken, so dafs nur Licht *über* der Pfeife aufs Prisma fällt. Schiebt man dann Prisma und Lupe auf ihren Trägern etwas aufwärts, so erscheint eine Interferenzfigur von solchen Strahlen, die nur aufserhalb der Pfeife verlaufen. Schwingen nun die Streifen beim Tönen der Pfeife mit, so rührt in diesem Falle die Bewegung allein von den Spiegeln oder dem Prisma her. Es war nun dieser Fehler durch obiges Hülfsmittel zwar nicht *absolut* zu vermeiden, denn bei möglichst starkem Anblasen gab die Wanderschütterung immer noch bei elfmaliger Reflexion eine Verschiebung der Interferenzfigur um etwa die Breite eines Interferenzstreifens. Allein ihr Einflufs konnte thatsächlich vernachlässigt werden bei den mäfsigen Pfeifentönen, welche in den ersten Versuchsreihen des folgenden Paragraphen gemessen wurden. Die durch die Luftschwingungen veranlafste Streifenverschiebung betrug hingegen selbst bei den schwächsten Pfeifentönen mehrere ganze Streifenabstände.

1) Aus diesem Grunde ist das Resultat der Vorversuche, welches in einer Notiz des K. K. akademischen Anzeigers in Wien mitgetheilt wurde, etwas zu grofs; man vergleiche die unten mitgetheilten genauen Messungen.

Wir wollen nun beschreiben, wie mit dem Apparate genaue Messungen ausgeführt werden. Es sey daher vorausgesetzt, dafs die Pfeife durch einen constanten Luftstrom angeregt werde, von dessen Erzielung noch unten die Rede seyn wird. Ferner seyen Stimmgabel und Pfeife so abgestimmt, dafs die stroboskopische Schwingung der Interferenzlinien etwa 3 bis 5 Sekunden dauert. Das Fadenkreuz wird zu den Streifen so angestellt, wie es Fig. 5, Taf. IV zeigt. Es ist nun bekannt, dafs man zwar nicht mit Genauigkeit eine beliebige Stellung des Fadenkreuzungspunktes *zwischen* je zwei benachbarten Streifen abschätzen kann; es ist aber nicht minder bekannt, dafs man mit einer sehr bemerkenswerthen Genauigkeit erkennen kann, wenn der Kreuzungspunkt *mit der Mitte* eines dunklen oder hellen Streifens coincidirt, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man das Kreuz irgend eines feinen Winkelmefsapparates mikrometrisch wiederholt auf ein und denselben Streifen einstellt. Man erhält übereinstimmende Resultate, namentlich, wenn man durch passende Regulirung der Spaltenbreite die Streifen recht schwarz erscheinen läfst. Diefs ist aber mittelst der fixen Spalte *s*, welche mitten hinter der intermittirenden Spalte *v* steht, (Fig. 3 Taf. IV) während des Versuches ohne Störung der übrigen Theile möglich.

Es erhellt aus dem Gesagten, dafs man auch bei langsamer Schwingung der Streifen nach oben und unten mit grofser Zuverlässigkeit die Zeitpunkte angeben kann, in denen das Fadenkreuz scheinbar gerade über die Mitte eines hellen oder dunklen Streifens rückt. Bei unseren Versuchen war es nicht nöthig, monochromatisches Licht zu benutzen, da wir vorläufig nur Pfeifenklänge untersuchten, bei denen in Maximo fünf dunkle Streifen bei einer Schwingung durchs Fadenkreuz gingen. Die mittleren Streifen der Interferenzfigur sind aber kaum farbig gesäumt, so dafs wir im Interesse der Helligkeit weifses Licht wählen konnten, dann aber natürlich in der Rechnung die Wellenlänge der hellsten Spectralstrahlen zu Grunde legen mufsten.

Der Beobachter hatte nun, ins Ocular *o* Fig. 3 Taf. IV blickend, einen Taster T zur Hand, mit welchem ein galvanisches Element E geschlossen werden konnte, so dafs auf dem Papierstreifen eines elektromagnetischen Registrirwerkes R die obigen Durchgangspunkte registrirt wurden. Zugleich aber war in einer anderen Schliefsung ein in der Figur nicht verzeichnetes Secundenpendel eingeschaltet, welches auf demselben Papierstreifen Sekundenpunkte markirte. Auf diese Weise war es möglich, die registrirten Beobachtungen auf absolutes Zeit-Mafs umzurechnen. Es ist nun sofort klar, dafs die Abstände der vom Beobachter registrirten Punkte periodisch variiren müssen und dafs aus denselben bei hinreichender Anzahl der registrirten Punkte der Verlauf der Dichtigkeitsänderung im Knoten, also auch die Bewegung der Lufttheilchen in der Pfeife und Intensitätsverhältnisse der etwa vorhandenen Obertöne berechnet werden können.

Als Beispiel geben wir in Fig 6 Taf. IV naturgetreu in wirklicher Gröfse das Ansehen eines Stückes des Streifens, welcher zu den ersten Messungen des folgenden Paragraphen diente, Messungen bei sehr geringer Tonstärke, welche, wie die Rechnung zeigt, bis auf eine äufserst kleine mittlere Differenz mit einer einfachen Sinusbewegung der Lufttheilchen übereinstimmen. In der Horizontallinie von m bis m' sind die vom Secundenpendel markirten Punkte, in der Linie nn' die Punkte des Beobachters zu finden. Eine ganze Auf- und Abwärtsbewegung der Interferenzlinien umfafst also das Stück des Papiersteifens von E' bis F. Man sieht, dafs jede Halbschwingung durch fünf Punkte (wie z. B. C' B' A B C) dargestellt ist. Diese Punkte bezeichnen die Augenblicke, in welchen nach einander Helligkeitsmaxima und Minima der Interferenzfigur durchs Fadenkreuz gingen. Da der Beobachter unwillkürlich kurze Striche schreibt deren Länge veränderlich ausfällt, so ist es bei der Messung nöthig zu wissen, in welcher Richtung der Schreibstift des Registrirwerkes auf dem Papierstreifen geschrieben hat. Diese Richtung ist in Fig. 6 Taf. IV durch einen Pfeil angedeutet. Man hat also bei der Messung der Zeitabstände die links befindlichen Anfangspunkte der Striche ins Auge zu fassen, was durch punktirte Vertikallinien angedeutet ist.

Endlich ist noch die Gebläsevorrichtung zu erwähnen. Die Herstellung eines hinreichend constanten Luftstromes war bei den Versuchen die gröfste praktische Schwierigkeit, da die Schwingungszeit der Interferenzfigur so äufserst sensibel für sehr kleine Schwankungen in der Tonhöhe der Pfeife ist; die letztere steigt bekanntlich mit der Stärke des Anblasens. (Am geeignetsten wäre wohl ein Wassertrommel- oder Centrifugalgebläse). Nach mehreren Versuchen gelang die Erzielung eines genügend constanten Luftstromes auf folgende Weise. In Fig. 3 Taf. IV stellt L den etwa 2 Kubikfufs fassenden Windfang eines Doppelgebläses dar. Zwei unterhalb befindliche, kleine Blasebälge pumpen Luft in L, wenn man eine seitliche, (nur punktirt angedeutete) Hebelvorrichtung rr handhabt. Die Wände von L waren dünne, bewegliche Holzplatten mit Lederdichtung. Der Wind gelangt durch eine Leitung von u bis w zur Pfeife. Ist L durch Gewichte belastet, so kann man allerdings die Thätigkeit des Pumpenwerks so einrichten, dafs ein Holzstab a, welcher mit seinem oberen Ende über den Gebläsetisch hervorragt, stets ein und dieselbe Höhe beibehält, was an einem seitlich angebrachten Zeiger z mit Leichtigkeit beurtheilt werden kann. Allein das Belastungsgewicht schwankt dabei und bewirkt durch seine träge Masse in L Stöfse, welche sich wellenartig bis zur Pfeife fortpflanzen. Diese Stöfse aber müssen die Erscheinung trüben. Wenn man bedenkt, dafs eine stroboskopische Streifenschwingung von 5 Secunden Dauer nicht weniger als 900 Pfeifenschwingungen zusammenfafst, so ist leicht zu verstehen, dafs durch rasche Schwankungen in den gesetzmäfsigen Elongationen ein Mattwerden der bewegten Interferenzstreifen entsteht, welches dieselben leicht bis zur Unkenntlichkeit verwischt. Der Masseneinflufs des Belastungsgewichtes läfst sich zum gröfsten Theile unschädlich machen, indem man dasselbe gänzlich durch eine leichte, aber starke Feder F Fig. 3 Taf. IV ersetzt, welche mit Hülfe des Zeigers z wie oben auf nahe constanter Spannung erhalten wird. Nun blieben hauptsächlich noch die Stöfse der Klappenventile unschädlich zu machen. Diefs gelang denn auch, indem zwischen Gebläse und Pfeife zwei sehr grofse Glasballons eingeschaltet wurden, von denen der zweite zum gröfsten Theil mit etwa nufsgrofsen, rauhen Kalksteinstücken gefüllt war. Wellenförmige Stöfse, welche sich von L über u und X nach Y fortpflanzen, werden durch die vielen Reflexionen in der Füllung fast ganz vernichtet, während der Widerstand gegen die strömende Bewegung der Luft nicht beträchtlich ist. Ferner haben wir bei den meisten Versuchen zu den Leitungen u und w sehr lange Gummischläuche von etwa $\frac{3}{4}$ Zoll Weite benutzt. Zwei Wasser-Manometer m und M zeigten den Druck, ersteres im Ballon Y, das zweite unmittelbar unter dem Pfeifenhalse. Das letztere war der den Luftstrom regulirenden Hülfsperson unmittelbar sichtbar, indem ein Schlauch h die Verbindung von M bis q vermittelte. Es gelang nun leicht, wenigstens bei den schwächeren Erregungen der Pfeife, den Windstrom so constant zu erhalten, dafs das Manometer M sich während der Versuche gar nicht merklich änderte. Allerdings erschienen die Interferenzstreifen während der stroboskopischen Schwingung stets etwas matter, als im Ruhezustande, jedoch nicht so sehr, dafs es die Messungen gehindert hätte.

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dafs sich sowohl die Pfeife, als auch die Lupe und der Taster auf gesonderten, soliden Unterstützungen befanden, damit aufser der Luftschwingung nicht etwa anderweitige Erschütterungen im Gesichtsfelde gesehen werden konnten.

Schliefslich geben wir die wichtigsten Dimensionen des oben beschriebenen Apparates. Da zunächst eine Prüfung über die Genauigkeit der Messungen nöthig war, so wählten wir eine solche Pfeife, welche bei nicht zu starker Anregung voraussichtlich den Grundton möglichst rein liefert, d. h. eine im Verhältnifs zur Länge sehr dicke Pfeife. Unsere Pfeife sprach sehr gut an. Bei starkem Blasen, bei dem allerdings Obertöne hinzutraten, war der Klang sehr voll und kräftig. Um den Grundton ganz in den ersten Oberton überspringen zu lassen, mufste jedoch mit einer ganz beträchtlichen Vehemenz geblasen werden. Alle Beobachtungen wurden mit Sonnenlicht gemacht, da Lampenlicht schon bei dreimaliger Reflexion zu lichtschwache Interferenzlinien gab.

Schwingungszahl der Pfeife pro Secunde . .	181,
Länge der Pfeife	360 Mllm.
Querschnitt der Pfeife	59 und 52 Mllm.
Breite der Mundöffnung	52 Mllm.
Höhe der Mundöffnung	17 Mllm.
Dicke der Luftsäule zwischen den Glasplatten *gg* Fig. 3, Taf. IV	58,5 Mllm.
Dicke der Glasplatten	3 Mllm.
Breite der lichtgebenden Spalte bei den meisten Versuchen	0,4 Mllm.
Excursionen der schwingenden Spalten .	5 bis 6 Mllm.
Abstand von *v* bis *g* in Fig. 3, Taf. IV . .	4500 Mllm.
Abstand von der Pfeife bis zur Lupe . . .	750 Mllm.

Aufserdem sey noch erwähnt, dafs es viel bequemer ist, *während der Versuche die Pfeife und nicht die Gabel abzustimmen.* Die Pfeife besitzt daher neben der Mundspalte zwei Schieber, (*l* in Fig. 3) welche der Beobachter nur seitlich hervorzuziehen braucht, um die Pfeife tiefer zu stimmen. Ferner braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dafs es sich für bestimmte Fälle der Untersuchung empfehlen würde, das Licht in der Längsrichtung durch die gedeckte Pfeife zu senden.

§. 2.

Luftschwingung in der gedeckten Pfeife.

Es wurde mit unserer Pfeife, welche wohl als eine sehr weite bezeichnet werden kann, zunächst die Luftschwingung bei möglichst mäfsigem Anblasen analysirt. Da hierbei mit Sicherheit der einfachste Fall einer stehenden Welle zu erwarten war, (Helmholtz, Tonempfindungen Seite 152), so konnten wir an diesem Falle die Genauigkeit unserer Messungen prüfen. Alsdann wurde das Verfahren auf Schwingungen ausgedehnt, bei welchen Obertöne deutlich hervortraten.

Schwingungen bei schwachem Anblasen. Bei 28^{mm} Wasdruck (es ist stets der bei q Fig. 3 gemessene zu verstehen) begann die Pfeife zu tönen, jedoch matt. Der Druck wurde auf 40^{mm} gesteigert und dort constant erhalten. Vor der Beobachtung war das Fadenkreuz auf den mittleren dunklen Streifen der Interferenzerscheinung Fig. 5 Taf. IV eingestellt. Es zeigt sich nun beim Tönen, daſs die Excursionen der Streifen nach oben und unten, soweit man schätzen konnte, gleich waren. Die Streifen rückten etwa um den Abstand x bis y der Fig. 5 auf und nieder, was vorläufig andeutete, daſs bei unserer Pfeife Verdichtungen und Verdünnungen gleich waren. (Nach den Versuchen von Kundt ist dieſs je nach der Stellung der Mundspalte durchaus nicht bei allen Pfeifen der Fall). Die Gesammtverschiebung der Streifen wurde vorläufig auf etwa das 2,4 bis 2,5 fache des Abstandes zweier dunkler Streifen geschätzt. (Diesen Abstand nennen wir in der Folge kurz »Streifenabstand«).

Nun wurde diese Schwingung registrirt. Es ist aus Fig. 5 ersichtlich, daſs bei einer Halbschwingung zwischen x und y drei Minima und zwei Maxima der Helligkeit durchs Fadenkreuz gehen muſsten, welche auf dem Papierstreifen (Fig. 6) Gruppen von je fünf Punkten lieferten. Es ist leicht einzusehen, daſs in der Fig. 6 A dem mittleren, C und C' den beiden äuſseren dunkeln Streifen entsprechen, während B und B' die Durchgangspunkte der beiden Helligkeitsmaxima sind. Die Punkte D und D' gehören den beiden benachbarten Halbschwingungen an. Halbirt man die Abstände DC und $C'D'$, so stellen die Halbirungspunkte E' und E offenbar den Anfang und das Ende unserer Halbschwingung dar. Schon der bloſse Anblick der Punktreihe zeigte, daſs bei dieser Tonstärke die Schwingungsform kaum wesentlich von einer einfachen Pendelbewegung abweichen kann. Der Umstand, daſs die Abstände DC, $D'C'$ usw. der letzten Punkte benachbarter Halbschwingungen durchschnittlich denselben Werth hatten, bestätigte, dafs bei unserer Pfeife Luftverdichtung und Verdünnung gleich grofs waren, wenigstens innerhalb der Grenzen der Mefsbarkeit.

Wir wollen zunächst nur die Bewegung der Interferenzstreifen als eine gegebene, stehende Schwingungs-Erscheinung im Auge behalten und erst später über den Zusammenhang mit der Luftbewegung in der Pfeife sprechen; dieser Zusammenhang ist jedoch ein äufserst einfacher. Jede pendelartige Bewegung der Luftsäule erzeugt eine pendelartige Bewegung der Streifen.

Es war nun zunächst zu untersuchen, bis zu welchem Grade der Annäherung die bei obigem schwachen Tone registrirten Streifenschwingungen mit einer einfachen Sinusbewegung übereinstimmen. Zu dem Ende wurden die registrirten Punktabstände bei einer gröfseren Zahl von Schwingungen gemessen. Es ist klar, dafs die stroboskopische Erscheinung bei den Beobachtungen trotz aller Vorsicht bald rascher, bald langsamer verlief; da dieselbe ja aus dem Unterschiede zweier Schwingungserscheinungen entspringt, deren kleinste Schwankungen somit von grofsem Einflusse sind. Von den registrirten Schwingungen wurden daher nur solche der Messung unterzogen, deren vorhergehende und nachfolgende möglichst gleichbeschaffen waren, während welcher also die Tonhöhe nicht bedeutend variirt haben konnte. Die Länge der in den folgenden Beobachtungsreihen gemessenen stroboskopischen Schwingungen betrug auf dem Papierstreifen zwischen 2,6 und 5 Secunden, je nach der Abstimmung von Pfeife und Gabel, welch letztere natürlich auf die *Art* der Streifenbewegung *keinen Einflufs* hat. Die mittlere Dauer unserer stroboskopischen Schwingungen war also etwa 3,8 Secunden.

Wir wollen nun die Zeit bei allen Schwingungen vom Durchgange des mittleren schwarzen Streifens, also vom Moment der Markirung des Punktes A in Fig. 6 Taf. IV zählen. Für den Fall einer einfachen Pendelbewegung ist dann die Ausweichung des mittleren Streifens zur Zeit t gegeben durch die bekannte Formel

$$y = a \sin \frac{2\pi t}{T} \qquad (1).$$

Wir wollen ferner zur Messung dieser Ausweichungen die Distanz zweier schwarzer Streifen als Einheit wählen. Verfliefst nun von der Markirung von A bis zu derjenigen des Punktes B (Fig. 6) die Zeit t_1, so ist hier $y = \frac{1}{2}$, da der Punkt B dem nächsten hellen Streifen entspricht. Wir erhalten also:

$$\tfrac{1}{2} = a \sin \frac{2\pi t_1}{T} \qquad (2).$$

Ebenso ergiebt sich

$$1 = a \sin \frac{2\pi t_2}{T} \qquad (3),$$

wenn man t_2 die auf dem Papierstreifen zu messende Zeit der Markirung des Punktes C nennt, da C den Durchgang des nächst folgenden dunkeln Streifens bezeichnet. Ebenso ist noch auf dem Papierstreifen der Abstand AE als Maafs für die Zeit $\frac{T}{4}$ gegeben. Es ist klar, dafs sich dann verhalten müssen:

$$t_1 : t_2 : \frac{T}{4} = AB : AC : AE \qquad (4).$$

Ebenso mufs sich verhalten

$$t_1 : t_2 : \frac{T}{4} = AB' : AC' : AE' \qquad (5).$$

Um nun aus einer gröfseren Anzahl von registrirten Schwingungen die Unregelmäfsigkeiten thunlichst zu eliminiren, so wurden von allen brauchbaren Schwingungen auf dem Papierstreifen unmittelbar die drei Distanzen $BB' = b$, $CC' = c$ und $EE' = e$ gemessen und für die ganze Beobachtungsreihe die Summen sämmtlicher b, c und e gebildet, welche Summen wir mit Σb, Σc und Σe bezeichnen wollen. Anstatt der Gleichungen (4) und (5) können wir dann schreiben:

$$t_1 : t_2 : \frac{T}{4} = \Sigma b : \Sigma c : \Sigma e$$

oder

$$t_1 = \frac{\Sigma b}{\Sigma e} \cdot \frac{T}{4} \text{ und } t_2 = \frac{\Sigma c}{\Sigma e} \cdot \frac{T}{4}.$$

Durch dieses Verfahren sind die Ungleichförmigkeiten jedenfalls am zweckmäfsigsten eliminirt, weil in diesem Verfahren den stroboskopischen Schwingungen mit längerer Dauer (welche ohne Zweifel genauer registrirt wurden) ein gröfseres Gewicht beigelegt ist.

Substituirt man die Werthe für t_1 und t_2 in die Formeln (2) und (3), so müssen beide für a denselben Werth ergeben, wenn die Streifenbewegung in der That einer einfachen Pendelschwingung entspricht, oder wenn man

$$\beta = \frac{\Sigma b}{\Sigma e} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ und } \gamma = \frac{\Sigma c}{\Sigma e} \cdot \frac{\pi}{2}$$

nennt, so mufs die Gleichung

$$\sin \gamma = 2 \sin \beta$$

erfüllt seyn.

Zwei vorläufige Beobachtungsreihen ergaben nun zunächst für b, c und e folgende Werthe in Mllm.

I.			II.		
b	c	e	b	c	e
9	21	34	14	29	46,5
10	22	35	20	48	71
12	30	49	24,5	52	79
15	37	55	23	50,5	75
11	26	39	21	46	67
25	53	77	17	40	64
11,5	26	39	19	46	72
10	24	40	12,5	29	43
12	26	40	16	32,5	46
15	30,5	45,5	10	23	37
$\Sigma b =$ 130,5	$\Sigma c =$ 295,5	$\Sigma e =$ 453,5	$\Sigma b =$ 177	$\Sigma c =$ 396	$\Sigma e =$ 600,5

Das Verhältnifs der drei Summen stimmt sehr gut überein. Berechnet man die Winkel β und γ in beiden Fällen, so ergiebt sich:

Aus der Beobachtungsreihe I.

$$\beta = 25^0\, 54' \qquad \gamma = 58^0\, 39'$$
$$\sin \beta = 0{,}436802 \qquad \sin \gamma = 0{,}854005$$

Aus den Beobachtungen II.

$$\beta = 26^0\,31' \qquad \gamma = 59^0\,21'$$

$$\sin\beta = 0{,}446458 \qquad \sin\gamma = 0{,}860297$$

Die Gleichung $\sin\gamma = 2\sin\beta$, welche die Bedingung ausdrückt, dafs die Bewegung eine einfache Sinusbewegung sey, ist also *sehr nahe* erfüllt. Berechnet man aus Formel (2) die Amplitude und nennt sie a', nennt man ferner a'' die aus Formel (3) berechnete Amplitude der Streifenschwingung, so erhält man aus den Beobachtungen der Reihe I

$$a' = 1{,}1447 \qquad a'' = 1{,}1710$$

aus der Reihe II

$$a' = 1{,}1200 \qquad a'' = 1{,}1624.$$

Diefs sind die einseitigen Excursionen der Interferenzerscheinung, daher die Gesammtverschiebung das doppelte dieser Werthe. Die Gesammtverschiebung war vorher auf 2,4 bis 2,5 geschätzt worden, was mit dem Ergebnifs der letzteren Werthe genügend übereinstimmt.

Hatten diese Vorversuche bereits ein zu Gunsten der Methode sprechendes Resultat geliefert, so mufste es uns wichtig erscheinen, einige mit gröfserer Sorgfalt ausgeführte Messungen nach derselben Art anzustellen. Es wurden daher noch drei Beobachtungsreihen mit ein wenig geringerer, aber constanterer Windstärke angestellt. Die bestgelungenen Aufzeichnungen wurden während der Beobachtung durch ein telegraphisches Zeichen kenntlich gemacht. Die daran vorgenommenen Messungen ergaben folgendes Resultat:

III.			IV.			V.		
b	*c*	*e*	*b*	*c*	*e*	*b*	*c*	*e*
8,5	17,5	24,5	9	20,5	31	11,5	25	37
7	15,5	23	10,5	22	33	10	23	35
7,5	18	26,5	9,5	21	31	11,5	24	36,5
7	16	24	8,5	20	29	11	23	33,5
8	17,5	26,5	9	20,5	31	11	25	36
13	30	44	12	25	37	13	29	42
13	28,5	44	10,5	23	33,5	12,5	30	44,5
9	20	31,5	11	24	34	14	32	46
9	19	30	12	27,5	40	13	29	42
11	24	35	14	34	50			
14	30	43						
10	22	32						
8	18	27						
$\Sigma b =$ 125	$\Sigma b =$ 276	$\Sigma e =$ 411	$\Sigma b =$ 106	$\Sigma c =$ 237,5	$\Sigma e =$ 349,5	$\Sigma b =$ 107,5	$\Sigma c =$ 240	$\Sigma c =$ 352,5

Werden hieraus wie oben die Werthe für β, γ, a' und a'' berechnet, so ergiebt sich:

	III	IV	V
β	27° 22′	27° 18′	27° 27′
γ	60 26′	61° 10′	61° 17′
$\sin\beta$	0,459683	0,458650	0,460974
$\sin\gamma$	0,869782	0,876026	0,877006
α'	1,0877	1,0901	1,0846
α''	1,1497	1,1415	1,1402

Die Bedingung $\sin\gamma = 2\sin\beta$ oder $a' = a''$ ist also wiederum sehr nahe erfüllt, d. h. die Streifen haben jedenfalls sehr nahe eine einfache Sinusbewegung.

Um ein Urtheil über die Genauigkeit der Beobachtungsmethode zu gewinnen, entsteht zunächst die Frage, um wie viel die Lage der markirten Punkte geändert werden müfste, damit die Uebereinstimmung mit der einfachen Pendelbewegung eine vollkommene würde. Diefs findet sich leicht, wenn man den Werth von γ als richtig annimmt und β aus der obigen Bedingungsgleichung berechnet; mit anderen Worten, wir setzen auf dem Papierstreifen Fig. 6, Taf. IV die Punkte A, C und C' als im Mittel richtig markirt vor-aus und suchen, um wieviel die mittlere Lage von B und B^1 geändert werden müfste, damit die Bewegung dem einfachen Sinusgesetz entspricht. Legen wir dabei die Beobachtungsreihe V zu Grunde, welche mit ihrer Abweichung zwischen III und IV in der Mitte liegt, so findet sich dafs zu $\gamma = 61^0\ 17'$ der Werth $\beta = 26^0\ 1'$ gehört. Die Beobachtung ergab $27^0\ 27'$, also eine Abweichung von nur $1^0\ 26'$. Da nun eine ganze stroboskopische Schwingung, welcher ein Winkel von 360^0 entspricht, im Mittel 3,8 Sec. dauerte, so ist der mittlere Fehler in der Zeitbestimmung der Punkte B und $B^1 = 0{,}0151$ Secunden, oder aber, man müfste diese Punkte auf dem Papierstreifen nur um je $0{,}3^{\mathrm{mm}}$ nach A hin verschieben, damit sie im Mittel der Voraussetzung einer einfachen Schwingung genügen.

Zunächst könnte man diese kleine Abweichung unvermeidlichen Fehlern (etwa der nicht absolut zu vermeidenden Spiegelerschütterung) zuschreiben. Dann ist aber dennoch die Genauigkeit unserer Methode eine sehr erfreuliche, denn bedenkt man, dafs die Schwingungen, deren Dauer in Wirklichkeit $\frac{1}{181}$ Sec. betrug, stroboskopisch auf 3,8 Sec., also im Verhältnifs 1 : 688 verlangsamt erschienen, so beträgt die obige mittlere Abweichung von 0,015 Sec. auf absolutes Zeitmaafs reducirt *nur* 0,000022 *Secunden*. Bis auf diese kleine Gröfse ist also die Zeitbestimmung nach unserer Methode *mindestens* genau.

Es kann bei Betrachtung der Beobachtungsresultate auffallen, dafs sich jedesmal $\sin\gamma$ kleiner als $2\sin\beta$ herausstellte. Diese Thatsache würde sich aus einem schwachen Mitklingen der Obertöne der Pfeife ganz gut erklären lassen. Mit Berücksichtigung der Obertöne müfste nämlich die Excursion der Streifen statt durch Formel (1) in folgender Weise dargestellt werden:

$$y = a_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + a_3 \sin\frac{6\pi t}{T} + a_5 \sin\frac{10\pi t}{T} + \dots \quad (6)$$

da bei gedeckten Pfeifen die geraden Partialtöne fehlen. Behalten wir nur die beiden ersten Glieder der Reihe bei, so ergeben sich zur Berechnung der Coëfficienten a_1 und a_3 folgende Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2} = a_1 \sin\beta + a_3 \sin 3\beta$$
$$1 = a_1 \sin\gamma + a_3 \sin 3\gamma$$

Man erhält aus den fünf Beobachtungsreihen folgende Werthe:

	a_1	a_3	$2(a_1 - a_3)$
I	1,1720	−0,0122	2,3684
II	1,1631	−0,0196	2,3654
III	1,1490	−0,0284	2,3548
IV	1,1399	−0,0231	2,3258
V	1,1383	−0,0250	2,3266

Da die Tonstärke dem Quadrat der Amplitude der Streifenbewegung proportional gesetzt werden kann, so würde die Intensität des Grundtones jene des mitschwingenden Obertones um mehr als das 2000fache übertreffen, wobei also letzterer neben dem ersteren für das Ohr allerdings verschwinden würde. Für die Zulässigkeit der obigen Erklärungsweise spricht jedenfalls die sehr grofse Uebereinstimmung in den Werthen von a_3, namentlich bei den letzten Beobachtungsreihen. Das negative Zeichen, welches sich aus allen Beobachtungen für a_3 ergiebt, hat den Sinn, dafs sich Grundton und Oberton in der Weise übereinander legen, wie es in Fig. 7, Taf. IV veranschaulicht ist. In dieser Figur sind die punktirten Linien einfache Sinuscurven, also die getrennten Darstellungen des Grund- und Obertons. Der Oberton macht Berg und Thal der Welle spitzer [1]). Wenn man also ein sehr schwaches Mitklingen des ersten Obertones der gedeckten Pfeife als Ursache der übereinstimmenden Abweichung unserer Messungen vom einfachen Sinusgesetzt gelten läfst, so darf als constatirt betrachtet werden, dafs bei sehr schwacher Anregung unserer Pfeife Grundton und erster Oberton sich derart zusammensetzen, dafs bei beiden die Maxima und Minima der Dichtigkeit zusammenfallen. Bei sehr starker Anregung ist,

1) In der Zeichnung ist übrigens der Oberton im Verhältnifs viel zu stark angenommen.

wie weiter unten ganz unzweifelhaft zu ersehen; das Verhältnifs gerade das umgekehrte.

Die in der dritten Columne zusammengestellten Werthe von $2(a_1 - a_3)$ geben die berechnete Totalverschiebung der Interferenzstreifen unter der Annahme des gleichzeitigen Vorhandenseins der beiden obigen Partialtöne. Diese Werthe stimmen noch besser, als die früher berechneten Werthe $2a'$ und $2a''$ mit der anfänglichen Schätzung der Totalverschiebung (2,4 bis 2,5 Streifenabstände). Es erscheint also die Annahme des Obertones trotz der Kleinheit der aus den Messungen gefolgerten Werthe immerhin als eine sehr wahrscheinliche.

Aus der Bewegung der Interferenzfigur läfst sich nun leicht der Dichtigkeitswechsel der Luft an der betreffenden Stelle der Pfeife berechnen. Nennen wir l die Länge des Weges, welchen das Licht zwischen unseren Glasplatten durchwandert, ferner λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft von normaler Dichte, so entfallen auf jenen Weg bei normaler Luftdichte $\frac{l}{\lambda}$ Lichtwellen. Sobald die Luftdichte eine Veränderung erfährt, ändert sich ihr Brechungsquotient und die Wellenlänge des Lichtes, und zwar ist die neue Wellenlänge $\lambda' = \frac{n}{n'}\lambda$, wenn n der ursprüngliche, n' der neue Brechungsquotient der Luft ist. Die Anzahl der Wellenlängen, welche jetzt auf den Weg l entfallen, ist $\frac{l}{\lambda'}$. Die Differenz dieser Zahl und der früher auf den Weg l kommenden Wellenzahl ist aber offenbar die Zahl der Interferenzstreifen, um welche sich die Erscheinung bei der Dichtigkeitsänderung der Luft in der Pfeife verschoben hat. Dieselbe ist also

$$k = \frac{l}{\lambda'} - \frac{l}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{n' - n}{n}.$$

Nun kann $n^2 - 1$ und bei Gasen jedenfalls auch $n - 1$ der Dichte proportional gesetzt werden. Bezeichnet daher ϱ die ursprüngliche, ϱ' die geänderte Luftdichte, so ist $\varrho' - \varrho$ die Verdichtung,

$$\frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} = \frac{n' - n}{n - 1}$$

und

$$k = \frac{(n-1)\,l}{n\lambda} \cdot \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho}.$$

Es entspricht also der Verschiebung der Interferenzlinien um *einen* Streifenabstand die Dichtigkeitsänderung

$$\varrho^1 - \varrho = \varrho \cdot \frac{n\lambda}{(n-1)\,l}.$$

Da die Dicke der Luftsäule zwischen den Glasplatten $58{,}5^{\mathrm{mm}}$ war und dieselbe vom Lichte neun Mal durchlaufen wurde, so ist $l = 526{,}5^{\mathrm{mm}}$ zu setzen. Da ferner $n = 1{,}000294$ und $\lambda = 0{,}000575^{\mathrm{mm}}$, so ergiebt sich

$$\varrho^1 - \varrho = \varrho \,.\, 0{,}0037.$$

Wir ersehen also, dafs die Verdichtung in aliquoten Theilen der normalen Luftdichte erhalten wird, indem man die Anzahl der Streifen, welche das Fadenkreuz passirten, mit 0,0037 multiplicirt. Bei obigen Versuchen betrug die Totalverschiebung etwa 2,4 Streifenabstände. Daraus ergiebt sich der Unterschied zwischen der gröfsten und kleinsten Dichte der schwingenden Luft im Knoten unserer Pfeife = 0,00888 mal der normalen Luftdichte.

Um hieraus die Veränderung des Luftdruckes zu finden, mufs man berücksichtigen, dafs die Temperaturänderungen, welche den raschen Dichtigkeitswechsel begleiten, die Druckschwankungen vergröfsern. Man hat die obige Dichtigkeitsänderung mit 1,41 zu multipliciren, um die Druckveränderung zu finden. Die Differenz des gröfsten und kleinsten Luftdrucks im Knoten betrug also bei obigen Versuchen 0,0124 Atmosphären.

Aus dem Gesetz der Dichtigkeitsänderung im Knoten kann endlich das Schwingungsgesetz für jede beliebige Stelle der Pfeife gefunden werden. Da die Dichtigkeitsänderung in unserem Falle sehr nahe das einfache Sinusgesetz befolgte, so mufs auch die Luftbewegung in jedem Querschnitt sehr nahe eine einfache Pendelschwingung seyn. Daher stellt sich die Excursion ξ eines Lufttheilchens im Abstande x vom Knoten zur Zeit t durch folgende Formel dar:

$$\xi = A \sin \frac{2\pi t}{T} . \sin \frac{2\pi x}{c T}$$

wobei die Zeit t vom Durchgange der Lufttheilchen durch die Ruhelage gezählt wird. In der Formel ist T die Schwingungsdauer $= \frac{1}{181}$ Secunde, c die Schallgeschwindigkeit (340 Meter für unser Beobachtungslocal). Ferner ist $\frac{c T}{4}$ die theoretische Pfeifenlänge $= 470^{mm}$. Sie ist so beträchtlich gröfser, als die wirkliche Länge wegen des grofsen Querschnittes der Pfeife. Der Coëfficient A ergiebt sich unmittelbar aus dem früher bestimmten Werthe für die Verdichtung. Es ist nämlich, wenn man die normale Luftdichte zur Einheit wählt, und wenn man Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, die Dichte zur Zeit t ausgedrückt durch

$$1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \frac{2\pi A}{c T} . \sin \frac{2\pi t}{T} . \cos \frac{2\pi x}{c T} .$$

Ihr gröfster Werth im Knoten ist daher $1 + \frac{2\pi A}{c T}$, ihr kleinster $1 - \frac{2\pi A}{c T}$, also der maximale Dichtigkeitsunterschied $= \frac{4\pi A}{cT}$. Diese Differenz wurde oben ermittelt; sie betrug $= 0{,}00888$. Daher ergiebt sich $A = 1{,}32^{mm}$. Mit dieser Bestimmung von A ist die Schwingungsamplitude der Lufttheilchen in jedem Querschnitt der Pfeife gegeben. So wird z. B. die Bewegung der Theilchen in der Nähe der Mundöffnung der Pfeife, wo $x = 360^{mm}$ zu setzen ist, ausgedrückt werden durch

$$\xi = A \sin \frac{2\pi t}{T} . \sin \frac{2\pi . 360}{1878}$$

$$= 1{,}241 \sin \frac{2\pi t}{T} \text{ Mllm.}$$

Die Totalverschiebung (doppelte Amplitude) eines Lufttheilchens im Innern der Pfeife nahe der Mundöffnung war also bei unserem Tone $= 2{,}482^{mm}$. In der Mundöffnung selbst beträgt der Weg eines Theilchens wegen des verringerten Querschnitts $= 8{,}116^{mm}$. Wenn wir die Resultate noch einmal zusammenstellen, so erhielten wir beim Anblasen der Pfeife mit etwa 40^{mm} Wasserdruck:

Dichtigkeitsänderung im Knoten in aliquoten Theilen der Normaldichte . . . . = 0,00888.

Unterschied des gröfsten und kleinsten Luftdruckes im Knoten . . . . = 0,0124 Atmosphären. Weg eines inneren Lufttheilchens nahe bei der Mundöffnung . . . . = 2,482 Mllm.

Weg eines Theichens in der Mundöffnung selbst . . . . = 8,116 Mllm.

Pfeifenklang bei starkem Anblasen. Aufser den obigen, mehr zur Controle unserer Beobachtungsmethode ausgeführten Messungen, welche ein günstig zu nennendes Resultat lieferten, machten wir noch eine Messung bei bedeutend stärkerem Anblasen der Pfeife, um den Einflufs starker Obertöne zu bestimmen. Der Luftstrom wurde soweit verstärkt, bis das Manometer unter dem Pfeifenhalse 24^{mm} Quecksilberdruck zeigte. Der Ton der Pfeife war hierbei sehr stark und voll, die Obertöne (wenigstens der erste) deutlich hörbar, der Grundton jedoch war vorherrschend. Die gesammte Verschiebung der Interferenzfigur betrug 4 bis 4,5 Streifenabstände, indem abwechselnd die Streifen *m* und *n* der Fig 5, Taf. IV ins Fadenkreuz rückten. Bei der allmäligen Steigerung des Luftdruckes im Blasebalg hatte es sich gezeigt, dafs die Tonintensität anfangs zwar rasch, später aber in weit geringerem Maafse wächst. Der Zusammenhang zwischen Tonstärke und Manometerdruck kann nach unserer Methode sehr genau ermittelt werden und bleiben hierüber noch weitere Mittheilungen vorbehalten. Die Tonhöhe änderte sich bei verstärktem Anblasen sehr merklich.

Indem nun obiger Luftstrom möglichst constant erhalten und Pfeife und Gabel wiederum abgestimmt wurden, zeigte sich jedoch eine auffallende Veränderung in der Bewegungsart der Interferenzlinien. Ein Blick genügte, um zu erkennen, dafs es sich hier nicht um eine einfache Pendelschwingung handelte. Die Streifen verharrten während des weitaus gröfseren Theiles der Schwingungszeit unbeweglich in ihren extremen Lagen. Der Uebergang aus der höchsten Stellung in die tiefste (und umgekehrt) erfolgte nach jeder Halbschwingung fast sprungweise, was einen ganz eigenthümlichen Anblick gewährte und das genaue Registriren aller einzelnen Streifendurchgänge unmöglich machte, abgesehen davon, dafs bei dieser Tonstärke unser Gebläse nicht geeignet war, einen ganz constanten Luftstrom zu erzielen. Wäre eine Markirung der einzelnen Durchgänge der dunklen Streifen möglich gewesen, so wäre die registrirte Schwingung etwa ausgefallen, wie es Fig. 8 Taf. IV zeigt. Die langen Pausen bedeuten die höchste und tiefste Lage der Streifen, die fünf dichtgedrängten Punkte die kurze Zeit des Ueberspringens in die andere Lage. Wir mufsten uns unter diesen Umständen damit begnügen, je eine Schwingung durch vier Punkte wie CA und BD in Fig. 9 aufzuzeichnen, und zwar bedeutet C z. B. den Anfang, A das Ende der Aufwärtsbewegung, A bis B bedeutet die Zeit, während welcher die Streifen in der höchsten Lage zu ruhen schienen, BD bedeutet endlich die Zeit, während welcher die Streifen wieder in die tiefte Lage hinabsanken, um dortselbst wiederum eine längere Zeit zu ruhen, Die Bewegung während des Auf- und Abwärtsspringens schien, so weit sich beurtheilen liefs, eine gleichförmige zu seyn. Trägt man daher die Zeit als Abscisse, die Excursionen der Streifen als Ordinaten auf, so giebt die Fig. 10 Taf. IV ein möglichst annäherndes Bild der Streifenbewegung. Die Zeitabstände der Punkte $C'A'B'D'$ sind die auf dem Papierstreifen registrirten vier Punkte. Das Registriren selbst dieser vier Punkte war sehr schwierig, weil der plötzliche Uebergang von Ruhe in rasche Bewegung den Beobachter stets überrascht und unsicher macht. Daher gelang es nicht, unmittelbar nach einander mehrere Schwingungen zu verfolgen, vielmehr konnte nur mit Unterbrechungen registrirt werden. Gemessen wurden (siehe Fig. 9 Taf. IV) die Abstände CA, AB und BD. Als Beispiel geben wir einige Schwingungen.

CA	*AB*	*BD*
2,7 Mllm.	6,5 Mllm.	2,7 Mllm.
4,0 »	11,5 »	5,2 »
3,5 »	10,5 »	3,7 »
5,0 »	13,0 »	5,2 »
5,5 »	15,7 »	7,0 »

Die Uebereinstimmung mufs unter obigen Rücksichten eine befriedigende genannt werden. Es ergiebt sich, dafs die Zeit, während welcher die Streifen stillstanden, 2,52 mal so grofs war, als die Zeit der Auf- oder Abwärtsbewegung. Nimmt man, um die Intensität der Partialschwingungen zu berechnen, an, dafs die Stücke $C'B'$ und $A'B'$ der Schwingungscurve Fig. 10 geradlinig seyen, was jedenfalls der Wahrheit am nächsten kommt, so stellen sich die Elongationen wiederum durch die Reihe dar:

$$y = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + a_3 \sin \frac{6\pi t}{T} + a_5 \sin \frac{10\pi t}{T} + \ldots$$

Für die Coëfficienten dieser Reihe finden sich folgende Werthe:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2{,}6512 \\ a_3 &= 0{,}6698 \\ a_5 &= 0{,}2011 \\ a_7 &= 0{,}0077 \\ a_9 &= -0{,}0566. \end{aligned}$$

etc. etc.

Diefs sind die Amplituden der Partialschwingungen, welche unsere Bewegung der Interferenzstreifen zusammensetzen. Bei der Rechnung ist die Totalverschiebung der Streifen ($2AA'$ Fig. 10 Taf. IV) $= 4{,}3$ zu Grunde gelegt, wie es die Beobachtung im Mittel ergab. Die Amplitude des ersten Obertones ist also 3,958 mal, seine Intensität 15,665 mal kleiner, als die des Grundtones.

Will man von der Reihe für y nur die beiden ersten Glieder unter Vernachlässigung der übrigen berücksichtigen, so ergiebt sich eine Bewegung, wie sie durch Fig. 11 dargestellt ist, welche jedoch offenbar der Wahrheit weniger nahe käme. Für diese Annahme berechnen sich a_1 und a_3

sehr einfach, da die Curve Fig. 11 Taf. IV die Punkte A', E' und B' mit der Curve Fig. 10 gemein haben mufs. Aus dieser Bedingung findet sich

$$a_1 = 3{,}0347$$
$$a_3 = 0{,}8847,$$

also das Verhältnifs der Amplituden von Grundton und erstem Oberton $= 3{,}43$, das Verhältnifs der Intensitäten $= 11{,}77$, welche Werthe von den unter der vorigen Voraussetzung gefundenen nicht allzusehr abweichen.

Es ist hervorzuheben, dafs der Coëfficient a_3 jetzt positiv erscheint, d. h. Grundton und erster Oberton setzen sich bei starker Anregung unserer Pfeife unzweifelhaft so zusammen, *dafs das Verdichtungsmaximum des ersteren mit dem Minimum des zweiten zusammenfällt*, also umgekehrt, wie es bei sehr schwachem Anblasen vorausgesetzt werden konnte.

Da der Verlauf der Luftverdichtung durch dieselbe Curve Fig. 10 dargestellt wird, so sieht man, dafs die Dichtigkeitsänderung in der Pfeife jetzt nicht mehr stetig geschieht, sondern dafs dieselbe aus fast plötzlichen Verdichtungs- und Verdünnungsstöfsen besteht, welche die Pfeife mit der Schallgeschwindigkeit durchlaufen. Es steht diefs in guter Uebereinstimmung mit Riemann's Untersuchungen über Luftschwingungen mit endlicher Amplitude, welche zu dem Resultate führen, dafs sich bei intensiven Luftschwingungen immer derartige Verdichtungsstöfse bilden müssen.

Was nun den Unterschied zwischen der gröfsten und kleinsten Dichte im Knoten der Pfeife betrifft, so berechnet sich derselbe in analoger Weise, wie im ersten Falle. Er betrug 0,01887 der normalen Luftdichte, wobei auf einen kleinen Einflufs der Spiegelerschütterung Rücksicht genommen ist, welche hier schon anfing, sehr merklich zu werden. Der Unterschied zwischen dem gröfsten und kleinsten Luftdruck war 0,02242 Atmosphären, die Totalverschiebung eines Lufttheilchens im Schwingungsbauch fand sich $= 5{,}275$ Mllm., in der Mundöffnung $= 17{,}24$ Mllm.

Wurde die Pfeife mit 30 Mllm. Quecksilberdruck angeblasen, so fand sich aus der Streifenverschiebung ein Unterschied des Maximal- und Minimaldruckes im Knoten von 0,03366 (etwa $\frac{1}{30}$) Atmosphären. Bei noch stärkerem Anblasen schlug der Ton gänzlich in den ersten Oberton um. Es sey bemerkt, dafs die letztere, stärkste Druckschwankung beim Tönen unserer Pfeife noch bei weitem nicht den von Kundt an seiner Pfeife gefundenen Werth von $\frac{1}{16}$ Atmosphären erreicht. Die Kundt'sche Pfeife wurde also wohl ganz erstaunlich stark angeblasen.

§. 3.

Bemerkung über die Intensität der Luftbewegung an der Gränze der Hörbarkeit des Schalles.

Da sich durch die vorhergehenden Versuche Boltzmann's Vorschlag als sehr geeignet zur Vervollkommnung vibroskopischer Untersuchungen über Luftschwingungen erwiesen hatte, so schien es uns nicht uninteressant, wenigstens eine beiläufige Ermittelung der Amplitude der Luftbewegung im freien Raume an der Gränze der Hörbarkeit eines schwachen Tones zu versuchen. Die Dichtigkeitsänderungen im freien Raume sind so klein, dafs unser Apparat noch einer bedeutenden Verfeinerung bedurft hätte, um dieselben direct zu messen. Allein man kann sich bei dieser Frage auf die theoretischen Untersuchungen von Helmholtz stützen (Crelle's Journal für Mathematik), nach welchen die Intensität der Bewegung für einen entfernten Punkt des freien Raumes berechnet werden kann, wenn die Bewegung in einer tönenden Röhre gegeben ist. Man kann also auch aus der Entfernung, in welcher ein Pfeifenton von bekannter Stärke für's Ohr verlischt, die daselbst vorhandene Schwingungsweite finden.

Obwohl die Voraussetzungen, welche Helmholtz bei Ableitung seiner Formeln macht, von den Bedingungen unseres Versuches etwas abweichen, so dürfte doch die Menge des von der tönenden Röhre abgegebenen Schalles in beiden Fällen wenigstens der Gröfsenordnung nach nicht verschieden seyn, und auf eine gröfsere Genauigkeit, als die Bestimmung der Gröfsenordnung der Schallintensität an der Grenze der Hörbarkeit, machen unsere Versuche vorläufig keinen Anspruch.

Wir begaben uns mit unserer oben beschriebenen Pfeife sammt Manometer auf einen freien Platz in der Nähe der Stadt und bliesen die Pfeife möglichst genau mit derselben Stärke an, wie es bei den fünf ersten Versuchsreihen der vorigen Abhandlung der Fall war (Windstärke = 40 Mllm. Wasserdruck, Amplitude nahe der Mundöffnung 2,48 Mllm.). Alsdann bestimmten wir die Entfernung, in welcher der Ton für ein gutes Ohr unhörbar wurde. Als Mittel aller Versuche, welche zur Hälfte in der Richtung des herrschenden Windes, zur Hälfte gegen dieselbe gemacht wurden, ergaben sich 115 Meter.

Helmholtz fand für das Geschwindigkeitspotential im freien Raume den Ausdruck

$$\psi = -\frac{A\,Q}{2\pi}\cdot\frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho}, \qquad (1)$$

für das in der Pfeife:

$$\psi = \frac{A}{k\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\cos 2\pi n t -$$

$$\frac{A k Q}{2\pi}\cos k x \sin 2\pi n t \qquad (2),$$

wobei wir bezüglich der Bezeichnung auf die Abhandlung von Helmholtz verweisen. In der letzten Formel ist das zweite Glied klein gegen das erste; dasselbe mufs bei der Anwendung auf unsere Pfeife, bei welcher die Rückwand fest war, weggelassen werden, wie sich aus der Bedeutung dieses Gliedes ergiebt. Erlaubt man sich diese Vereinfachung, so findet man für die Differenz der gröfsten und kleinsten Luftdichte im Knoten in aliquoten Theilen der normalen Luftdichte den Werth:

$$\Delta = \frac{A k}{\pi n \cos k\alpha}.$$

Aus der ersten Formel aber ergiebt sich, wenn man die Constante A aus der eben gefundenen Gleichung bestimmt, für den Weg, welchen ein in der Distanz ϱ von der Pfeifenmündung befindliches Lufttheilchen im freien Raume während einer Halbschwingung vollführt, der Werth

$$y = \frac{\Delta \,.\, Q \,.\, \cos k\,\alpha}{2\,\pi\,\varrho}.$$

Hierbei ist Q der Querschnitt der Pfeife (nicht der Pfeifenmündung), α die Differenz zwischen der wahren und der sogenannten theoretischen Pfeifenlänge, $\frac{\pi}{2k}$ aber die theoretische Pfeifenlänge selbst ($\frac{1}{4}$ Wellenlänge des Pfeifentones).

Bei unserem Versuche nun war

$$\begin{aligned}
\Delta &= 0{,}009 \\
Q &= 3068 \text{ Quadrat-Mllm.} \\
\alpha &= 109{,}5 \text{ Mllm.} \\
\frac{\pi}{2k} &= 469{,}5 \text{ Mllm.}
\end{aligned}$$

daher $k\alpha = 20^0\,59'$ im Winkelmafs. Hieraus ergiebt sich der Weg eines Lufttheilchens in der Entfernung $\varrho = 115000$ Mllm. von der Pfeifenmündung, in welcher der Ton unhörbar wurde, also die Schwingungsweite an der Gränze der Hörbarkeit gleich

$$0{,}00004 \text{ Mllm.},$$

das ist etwa $\frac{1}{10}$ von der Wellenlänge des grünen Lichtes.

Diese Kleinheit der Amplitude zeigt, wie erstaunlich empfindlich das Gehörorgan für musikalische Töne ist. Wir müssen ausdrücklich hervorheben, dafs die Versuche um die Mittagszeit angestellt wurden, zu welcher Zeit das Tagesgeräusch aus der nahen Stadt nicht ausgeschlossen war. Ein feines, völlig ausgeruhtes Ohr würde gewifs in der Nacht noch viel kleinere Amplituden wahrnehmen.

Folgende Resultate sind nun leicht durch Rechnung zu finden. Die totale Dichtigkeitsänderung während der Schwingung beträgt an der Gränze der Hörbarkeit nach obigen

Versuchen $\frac{13}{100 \text{ Millionen}}$ der normalen Luftdichte. Berechnet man ferner die mechanische Arbeit, welche an der Gränze der Hörbarkeit durch den Quadratmillimeter exponirter Fläche pro Secunde geht, so ergiebt sich für dieselbe

$$\frac{1}{100 \text{ Billionen}} \text{ Kilogrammmeter.}$$

An das Ohr werden also in der Secunde etwa $\frac{1}{3 \text{ Billionen}}$ Klgrmeter abgegeben, wenn man den Querschnitt des Gehörganges auf 33 Quadrat-Mllm. schätzt.

Man wird bei der erstaunlichen Kleinheit dieser mechanischen Arbeit unwillkürlich aufgefordert, die Empfindlichkeit des Ohres für Schall mit der des Auges für Licht zu vergleichen. Folgende Zahlenangabe mag der Abschätzung halber hier erwähnt werden. Nach Thomsen (Pogg. Ann. Bd. 125, S. 389) sendet eine Kerze, welche per Stunde 8,2 Grm. Walrath verzehrt, in der Secunde $\frac{1}{35}$ Kilogrmtr. in Form von Strahlung aus. Davon kommen also auf 1 Quadrat-Mllm. in 115 Meter Distanz $\frac{1}{5740000 \text{ Millionen}}$ Klgrmeter, also etwa 17 mal mehr, als unsere Pfeife in jener Entfernung in Form von Schall an lebendiger Kraft durch der Quadrat-Mllm. hindurchstrahlt.

Es ist also unsere Pfeife eine weit schwächere Quelle von lebendiger Kraft als jene Kerze, und man ersieht aus diesen allerdings nur approximativen Zahlen, *dafs das menschliche Ohr in der Perception der ihm zugedachten Schwingungsarbeit mit dem Auge an Empfindlichkeit rivalisiren kann.*

Fig. 1.

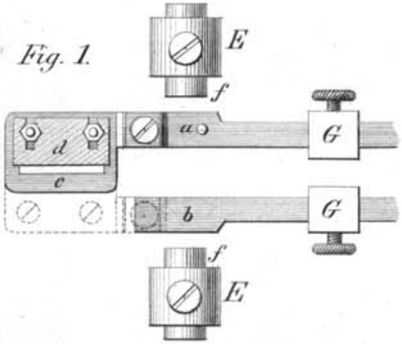

Fig. 2.

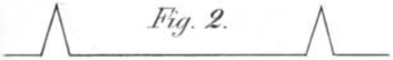

Fig. 3.

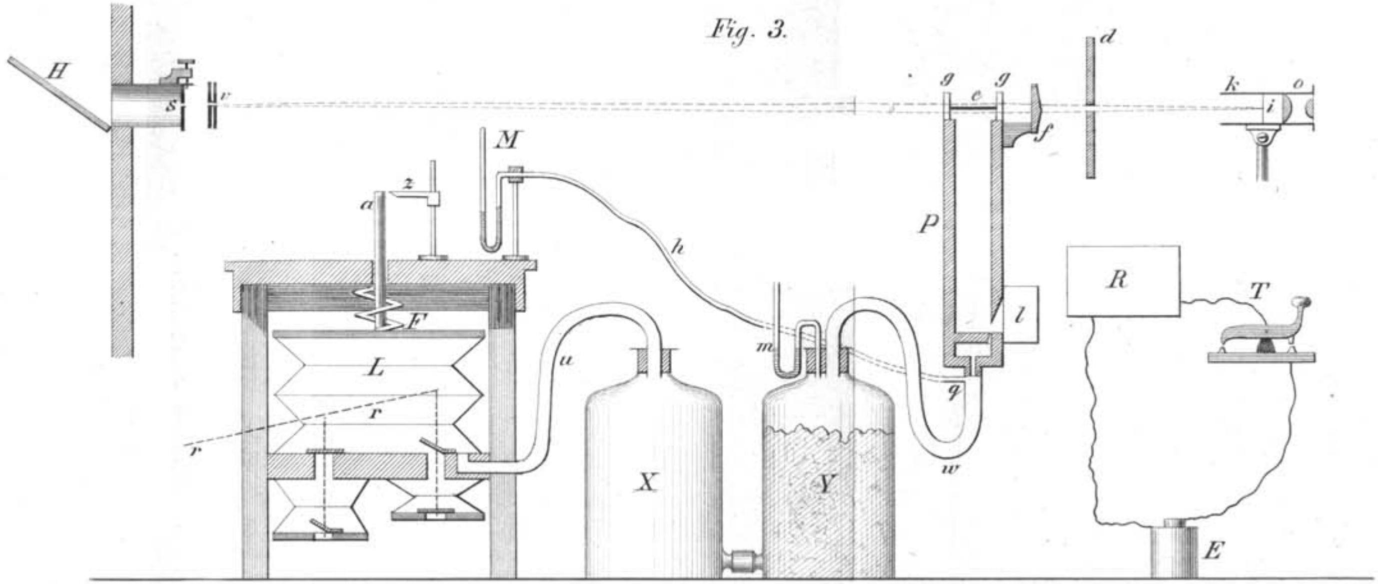

Fig. 4.

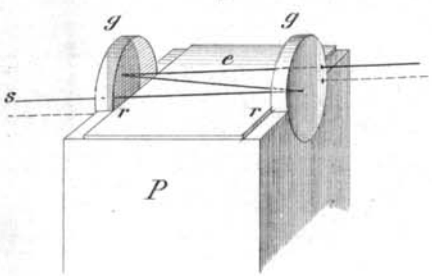

Fig. 5.

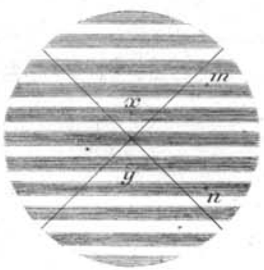

Fig. 6.

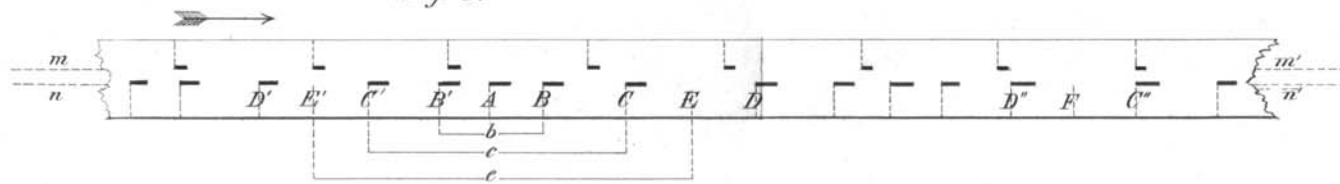

Fig. 8.

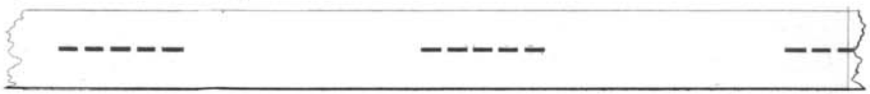

Fig. 9.

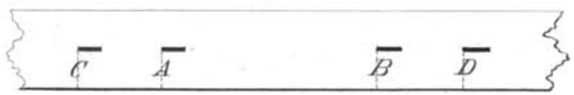

Fig. 7.

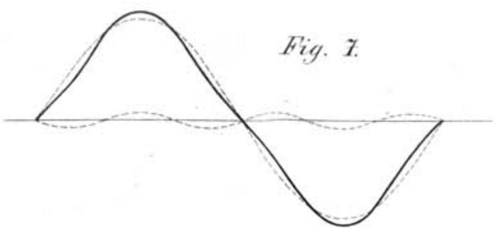

Fig. 10.

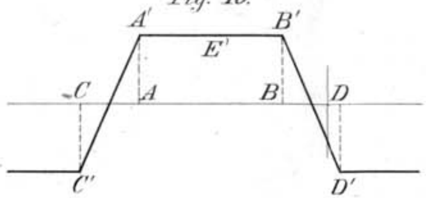

Fig. 11.